

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ЧЕРНОВА ІРИНА ОЛЕКСАНДРІВНА**

УДК 62-50

**МЕТОДИ СИНТЕЗУ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕКВІВАЛЕНТНИХ  
МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БАГАТОВИМІРНИХ  
ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Вінниця – 2019

Дисертацією є кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Робота виконана у Вінницькому національному технічному університеті Міністерства освіти і науки України

**Науковий керівник:** академік НАПН України, заслужений діяч в галузі науки і техніки, доктор технічних наук, професор  
**Мокін Борис Іванович**  
Вінницький національний технічний університет, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів та кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Данилов Валерій Якович**  
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
професор кафедри математичних методів системного аналізу

доктор технічних наук, професор  
**Усов Анатолій Васильович**  
Одеський національний політехнічний університет, завідувач кафедри вищої математики і моделювання систем

Захист відбудеться "01" березня 2019 р. о 10<sup>00</sup> на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 05.052.01 у Вінницькому національному технічному університеті за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, ГНК, ауд. 210.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Вінницького національного технічного університету за адресою: 21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, ГНК, а також на сайті університету.

Автореферат розісланий « 29 » січня 2019 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

С. М. Захарченко

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Як відомо з теоретичної електротехніки, технічної кібернетики та теорії автоматичного керування, процес у динамічному об'єкті, в якому має місце лише один накопичувач маси чи енергії, завжди може бути описаний математичною моделлю у вигляді диференціального рівняння першого порядку, а якщо ж цей динамічний об'єкт має два, три або  $n$  накопичувачів маси чи енергії, то процеси в ньому можуть бути описані диференціальними рівняннями, відповідно, другого, третього чи  $n$ -го порядку. І оскільки кожен конденсатор та кожна індуктивність є накопичувачем електромагнітної енергії, а кожна електронна система чи електротехнічний комплекс містять в собі десятки конденсаторів та котушок індуктивностей, то адекватними математичними моделями процесів у них фактично можуть бути лише диференціальні рівняння надзвичайно високих порядків. Аналогічно і кожна механічна система містить в собі десятки елементарних накопичувачів маси та потенціальної і кінетичної енергій, а тому адекватними математичними моделями процесів у них також можуть бути лише диференціальні рівняння надзвичайно високих порядків. Але, як показано в теорії вимірювань, при диференціюванні будь-якого реального фізичного процесу швидко накопичується похибка вимірювання параметрів цього процесу, оскільки високошвидкісні завади, що накладаються на будь-який процес, навіть якщо вони мають незначний рівень, при диференціюванні вносять суттєві похибки в результат вимірювання, а якщо ці завади диференціюються до того ж ще кілька разів, що має місце при використанні математичних моделей процесів у вигляді диференціальних рівнянь з порядком, вищим першого, то результати вимірювань, отримані в процесі моделювання конкретного фізичного об'єкта, спотворюються у ще більшій мірі. Тому дуже часто при використанні математичної моделі реального фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння невисокого порядку можна отримати результати моделювання більш наближені до цього реального фізичного процесу, аніж при використанні в якості математичної моделі цього процесу диференціального рівняння з високим порядком, визначеним дійсною кількістю елементарних накопичувачів енергії чи маси у фізичному об'єкті, процеси в якому моделюються. Процес заміни математичних моделей реальних фізичних процесів у вигляді диференціальних рівнянь високих порядків математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь невисокого порядку, які за певним критерієм достатньо адекватно відображають цей реальний фізичний процес, що моделюється, називається еквівалентуванням, а самі математичні моделі мінімального порядку називають еквівалентними математичними моделями.

На можливість використання під час моделювання реальних фізичних процесів з багатьма накопичувачами маси та енергії еквівалентних моделей невисокого порядку вперше вказав у шестидесятих роках минулого століття відомий київський вчений, академік Ішлінський, який висловив гіпотезу про те, що рух динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням з порядком, вищим третього, в діапазоні зміни координат руху можна еквівалентно (без внесення суттєвих похибок) описувати диференціальним рівнянням з

порядком, не вищим третього. З тих пір ця гіпотеза Ішлінського бездоказово сприймається як аксіома, для якої необхідно було рано чи пізно віднайти умови, за яких вона є справедливою.

А тому тема дисертаційного дослідження, в якому будуть отримані відповіді на те, за яких умов можна замість математичних моделей реальних динамічних процесів, що мають вигляд диференціальних рівнянь високого порядку, використовувати, не вносячи суттєвих похибок, еквівалентні математичні моделі, що мають вигляд диференціальних рівнянь мінімально-допустимого порядку, та відповіді на те, як ідентифікувати синтезовані еквівалентні моделі, є актуальною в рамках спеціальності 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в рамках наукової школи «Розроблення математичних моделей процесів, що протікають в складних технічних та організаційних системах, інформаційно-вимірювальних систем та систем автоматичного і автоматизованого керування цими процесами», створеної Заслуженим діячем науки і техніки України, академіком Національної академії педагогічних наук України, доктором технічних наук, професором Мокіним Б. І. Тема дисертаційної роботи відповідає науковому напрямку досліджень за науково-дослідною роботою Вінницького національного технічного університету (ВНТУ) на замовлення Міністерства освіти і науки України, де здобувач була виконавцем: «Інформаційна технологія обробки параметрів просторово-часових моделей даних динамічних багатозв'язних просторово-розподілених систем» (№ держреєстрації 0115U001122, 2015-2016 рр.). Основні задачі дисертації відповідають державним науково-технічним програмам, що визначені Законами України № 1977-XII «Про наукову і науково-технічну діяльність», № 74/98-ВР «Про національну програму інформатизації» та державній науково-технічній програмі України за пріоритетним напрямком 6. «Інформатика, автоматизація і приладобудування».

**Мета і завдання дослідження.** Мета дисертаційного дослідження полягає у зменшенні витрат часу на розв'язання задач аналізу та оптимізації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах шляхом використання еквівалентних математичних моделей мінімального порядку і методів їх синтезу та ідентифікації.

Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі поставлені і розв'язані наступні наукові завдання.

1. Здійснити аналіз наукових публікацій за темою дисертації і визначити множину завдань, які необхідно розв'язати для досягнення мети дисертаційного дослідження за сформульованою темою.

2. Довести, за яких умов процеси в багатовимірних лінійних неперервних динамічних об'єктах із класу мінімально-фазових можуть бути описані еквівалентними математичними моделями мінімального порядку та сформулювати умови визначення цього мінімуму.

3. Розробити методи синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей мінімального порядку, що адекватно описують процеси, які мають місце у багатовимірних неперервних лінійних динамічних об'єктах, не виходячи з класу

мінімально-фазових.

4. Розробити методику оцінювання похибки еквівалентування багатовимірних неперервних лінійних динамічних об'єктів математичними моделями мінімального порядку для визначення ступеня їх адекватності.

5. Розробити методи синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей мінімального порядку в класі немінімально-фазових, що адекватно описують процеси, які мають місце в багатовимірних неперервних лінійних динамічних об'єктах із класу мінімально-фазових.

6. Визначити оптимальну складність авторегресійних математичних моделей дискретних лінійних стохастичних динамічних об'єктів.

7. Модифікувати Фур'є-інтегральний метод ідентифікації неперервних нелінійних динамічних об'єктів для забезпечення можливості його використання в задачах синтезу еквівалентних математичних моделей не вище другого порядку.

**Об'єкт дослідження** – процеси в багатовимірних лінійних та нелінійних неперервних та дискретних динамічних об'єктах.

**Предмет дослідження** – математичні моделі мінімального порядку для адекватного опису процесів у багатовимірних, лінійних і нелінійних, неперервних і дискретних динамічних об'єктах та методи їх ідентифікації.

**Методи дослідження.** Під час виконання дисертаційного дослідження були використані методи теорії диференціальних рівнянь для визначення можливості їх використання в якості математичних моделей реальних фізичних процесів; методи теорії електротехніки для доведення факту, що порядок диференціального рівняння, яке використовується в якості математичної моделі процесу, що має місце у фізичному об'єкті, визначається кількістю елементарних накопичувачів маси чи енергії, яку містить в собі цей фізичний об'єкт; методи теорії функцій комплексної змінної для трансформації математичних моделей, заданих у часі на комплексну площину; методи теорії автоматичного керування для аналізу залежності процесів, що мають місце в об'єкті керування, від критичної частоти та від місця розташування полюсів передаточної функції на комплексній площині, а також для побудови логарифмічних частотних характеристик динамічних об'єктів; методи теорії інтегральних рівнянь для розв'язання задач синтезу математичних моделей нелінійних динамічних об'єктів; методи теорії вимірювань для дослідження залежності результатів вимірювання від частоти зрізу динамічного об'єкта, змінні стану якого вимірюються, а також для Фур'є-аналізу сигналів на вході і виході динамічних об'єктів та розроблення способу оцінювання похибки еквівалентування математичної моделі високого порядку; методи теорії ймовірностей взагалі та стаціонарних часових рядів зокрема для визначення оптимального порядку авторегресійних моделей реакцій дискретних динамічних об'єктів; методи теорії ідентифікації динамічних систем для розроблення методів ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів та методи теорії оптимізації для використання в процесі синтезу цих методів ідентифікації, а також методи технічної кібернетики і комп'ютерного моделювання для доведення адекватності синтезованих еквівалентних моделей мінімального порядку математичним моделям багатовимірних динамічних об'єктів високого порядку.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

1. Вперше визначено умови, за яких процеси в мінімально-фазових динамічних об'єктах (МФДО), що описуються лінійними диференціальними рівняннями високих порядків, можна еквівалентно описувати, не виходячи за клас МФДО, диференціальними рівняннями з різницею порядків старших похідних у лівій і правій частинах, не вищою трьох, що дозволяє зменшити витрати часу при їх застосуванні в задачах аналізу та оптимізації процесів у цих об'єктах.

2. Для лінійних багатовимірних МФДО вперше розроблено методи ідентифікації процесів у них математичними моделями з різницею порядків старших похідних у лівій і правій частинах, не вищою трьох, еквівалентними за частотою зрізу, якщо об'єкти працюють в режимі прямої передачі сигналу, та еквівалентними за критичною частотою, якщо об'єкти замикаються одиничним від'ємним зв'язком. В основу методів покладена система рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною частотою та частотою зрізу у випадку прямої передачі сигналу, або мінімальною та критичною частотами у випадку замикання об'єкта зворотнім зв'язком, а друга частина в обох випадках синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням логарифмічних амплітудних частотних характеристик (ЛАЧХ). Показано, що еквівалентні математичні моделі лінійного багатовимірного МФДО, синтезовані з використанням частоти зрізу та критичної частоти, відрізняються, що є ще одним доказом того, що будувати еквівалентні математичні моделі необхідно з урахуванням як характеру процесів в МФДО високого порядку, так і характеру задачі, що покладається на нього.

3. Запропоновано методи синтезу еквівалентних математичних моделей МФДО високого порядку в класі немінімально-фазових систем не вище другого порядку, що дозволяє пришвидшити обробку даних за цією моделлю, та методи ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних математичних моделей. Один із цих методів при еквівалентуванні динамічних об'єктів, що працюють в режимі прямої передачі сигналу, базується на незмінності частоти зрізу до і після еквівалентування та методі найменших квадратів відносно ЛАЧХ об'єкта і його еквівалентної моделі, а другий метод при еквівалентуванні динамічних об'єктів, що являють собою замкнуті системи, базується на незмінності критичної частоти до і після еквівалентування та методі найменших квадратів відносно фазових частотних характеристик об'єкта і його еквівалентної моделі.

4. Вперше доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду, який є стохастичною моделлю процесу в дискретному динамічному об'єкті, є модель авторегресії-ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по складовій ковзного середнього, що дозволяє пришвидшити обробку і такого класу моделей теж. В якості критеріїв оптимальності для цього доведення вибрано умову закладення в модель інформації про критичну частоту спектра об'єкта, процеси в якому моделюються, та умову закладення в модель інформації про напрям і зміну напряму тренду ковзного середнього.

5. Узагальнено на другий порядок лінійної частини відомий метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем з нелінійними характеристиками у вигляді поліномів та моделями першого порядку інерційної

частини, який базується на алгоритмі переведення кратних інтегралів Вольтерра, заданих у часовій області, в однократні інтеграли, для розв'язання яких використовуються амплітудно-фазові частотні характеристики інерційної частини цих систем.

**Практичне значення отриманих результатів.** Практична цінність отриманих в дисертації результатів полягає в першу чергу у тому, що вони доповнюють теорію синтезу та ідентифікації математичних моделей динамічних систем умовами використання замість математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів, тобто об'єктів високих порядків в задачах їх аналізу та оптимізації еквівалентних математичних моделей з мінімально-допустимим порядком, а також доповнюють цю теорію методами ідентифікації еквівалентних моделей, для яких створено конкретні алгоритми реалізації та розрахункові співвідношення для оцінювання адекватності.

Отримані результати доповнили також програми таких навчальних дисциплін, як «Методологія та організація наукових досліджень» та «Методологія та організація наукових досліджень в галузі інформаційних технологій» студентам спеціальностей 141 «Електроенергетика» та 126 «Інформаційні системи та технології», що викладаються студентам магістерської підготовки (акт впровадження від 14 листопада 2018 р.). Ефективність запропонованих методів синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів підтверджена в процесі розроблення еквівалентних математичних моделей системи керування тяговим електроприводом електромобіля. Саме ці результати дисертаційного дослідження, що націлені на розв'язання конкретних задач розроблення та використання еквівалентних моделей процесів у реальних пристроях автомобільного транспорту, передані для впровадження у ТОВ «АТП «Слободянюк» (акт впровадження від 14 листопада 2018 р.).

**Особистий внесок здобувача.** Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, авторові належать наступні наукові результати: [1] – розв'язання питання вибору оптимальної математичної моделі стаціонарного часового ряду; [2] – синтез методу ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу; [3] – розроблення алгоритму ідентифікації еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта; [4] – визначення умов і розроблення методів опису процесів у складних динамічних об'єктах еквівалентними моделями не вище третього порядку; [5] – побудова математичної моделі мінімального порядку для лінійної динамічної системи зі зворотним зв'язком; [6] – синтез еквівалентної математичної моделі лінійної системи автоматичного керування з ПД-регулятором у класі немінімально-фазових систем 2-го порядку; в роботі [7] – еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових з використанням критерію найменших квадратів; [8] – еквівалентування замкнутої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі, яка відповідає наявності ПД-регулятора; [9] – визначення умов та розроблення методів опису

процесів у складних динамічних об'єктах за еквівалентними моделями, не вищими за третій порядок; [10] – побудова математичної моделі мінімального порядку для лінійної динамічної системи зі зворотним зв'язком; [11] – узагальнення Фур'є-інтегрального методу ідентифікації на еквівалентні математичні моделі нелінійних динамічних систем з другим порядком їх інерційної складової; [12] – еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю мінімального порядку за умови незмінності критичної частоти; [13] – синтез еквівалентної математичної моделі вимірювальної системи в класі немінімально-фазових з використанням частоти зрізу; [14] – синтез еквівалентної математичної моделі в класі мінімально-фазових систем з використанням критичної частоти і методу найменших квадратів; [15] – розроблення алгоритму методу ідентифікації еквівалентної моделі багатовимірного динамічного об'єкта; [16] – розроблення алгоритму мінімізації порядку еквівалентних моделей для систем автоматичного керування з ПД-регулятором; [17] – визначення мінімального порядку моделі для систем автоматичного керування з ПД-регулятором; [18] – синтез математичної моделі замкнутої системи автоматичного керування з ПД-регулятором мінімального порядку в немінімально-фазовому просторі.

**Апробація матеріалів дисертації.** Результати, отримані в дисертаційному дослідженні, доповідались та обговорювались на п'яти міжнародних наукових конференціях: на III Міжнародній науковій конференції «Нелінійний аналіз і застосування», присвяченій пам'яті член-кор. НАН України В. Мельника (Київ, 1-3 квітня 2015 р.), на XXII Міжнародній науковій конференції з автоматичного управління «Автоматика 2015» (Одеса, 10-11 вересня, 2015), на 23-й Міжнародній конференції з автоматичного управління «Автоматика 2016» (Суми, 22-23 вересня 2016), на IV Міжнародній науковій конференції «Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах (ВКДТС-2017)» (Вінниця, 31 жовтня – 2 листопада 2017 р.) та на Міжнародній науковій конференції з контролю і управління в складних системах (КУСС-2018) (Вінниця, 15-17 жовтня 2018 р.), а також на чотирьох (XLIV–XLVII) науково-технічних конференціях підрозділів Вінницького національного технічного університету, що проводились у м. Вінниці у 2015-2018 роках (11-13 березня 2015 р. (без публікації тез), 2-11 березня 2016 р., 15-24 березня 2017 р., 14-23 березня 2018 р.).

**Публікації.** Результати дисертаційного дослідження опубліковані у 18 наукових роботах, з яких 6 опубліковано у наукових журналах, що входять до переліку фахових видань України, у т.ч. в одному електронному фаховому виданні, 2 опубліковано у періодичному журналі у США, що входить до наукометричної бази видань Scopus, 2 опубліковано у науковому журналі з міжнародним статусом, 5 є матеріалами міжнародних і 3 – регіональних наукових конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних літературних джерел зі 106 найменувань і додатків. Загальний обсяг дисертації складають 179 сторінки, з яких основний зміст дисертації викладено на 146 сторінках, на яких розміщено поряд із текстом 16 рисунків.



## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено основну характеристику роботи, в тексті якої обґрунтовано вибір теми дисертаційного дослідження та доведено її актуальність, показано зв'язок роботи з науковими програмами та науково-дослідною роботою кафедри, задано мету та окреслено об'єкт і предмет дослідження, сформульовано його задачі та викладено основні наукові і практичні результати та дані про їх впровадження, апробацію і публікацію.

У **першому розділі** здійснено аналіз публікацій за темою дисертаційної роботи та дотичних до неї і визначено, які з них доцільно використати в якості вихідних передумов до тих наукових задач, що постали перед дослідником в результаті цього аналізу та були ним сформульовані, а також приведено характеристику математичного апарату, який в-подальшому буде використовуватись в процесі розв'язання поставлених у роботі задач і з якого випливає, що при синтезі еквівалентних математичних моделей багатовимірних неперервних динамічних об'єктів використовуватимуться диференціальні рівняння в просторі змінної часу, передаточні функції в просторі комплексної змінної, амплітудна, фазова, дійсна й уявна частотні характеристики та їх логарифмічні відображення в частотному просторі, моделі авторегресії-ковзного середнього дискретних стохастичних об'єктів та математичний апарат Юла-Уокера для їх ідентифікації, а також багатократні інтегральні рівняння Вольтерра та ідеологія Ван-Тріса їх розв'язання в задачах синтезу еквівалентних математичних моделей нелінійних об'єктів з поліноміальними нелінійностями.

У **другому розділі** вперше доведено, що умови, сформульовані раніше Б. І. Мокіним, В. Б. Мокіним та О. Б. Мокіним, за яких процеси в мінімально-фазових динамічних об'єктах, що описуються лінійними диференціальними рівняннями високих порядків без похідних у правій частині –

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_n x, \quad n > 3, \quad (1)$$

можна еквівалентно описувати, не виходячи за клас мінімально-фазових, диференціальними рівняннями з порядком, не вищим третього –

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x, \quad (2)$$

не розповсюджуються на мінімально-фазові динамічні об'єкти, що описуються лінійними диференціальними рівняннями високих порядків з похідними у правій частині, наприклад –

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad n > 5. \quad (3)$$

до яких відносяться системи автоматичного керування з ПД-регуляторами, і показано, що для таких об'єктів еквівалентні моделі в класі мінімально-фазових не можуть мати порядок, менший п'яти –

$$a_5 \frac{d^5 y}{dt^5} + a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \quad (4)$$

Для мінімально-фазових лінійних багатовимірних динамічних об'єктів, що

працюють в режимі прямої передачі сигналу і не мають похідних у правій частині диференціальної математичної моделі, вперше розроблено метод ідентифікації процесів у них математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу  $\omega_{cut}$ .

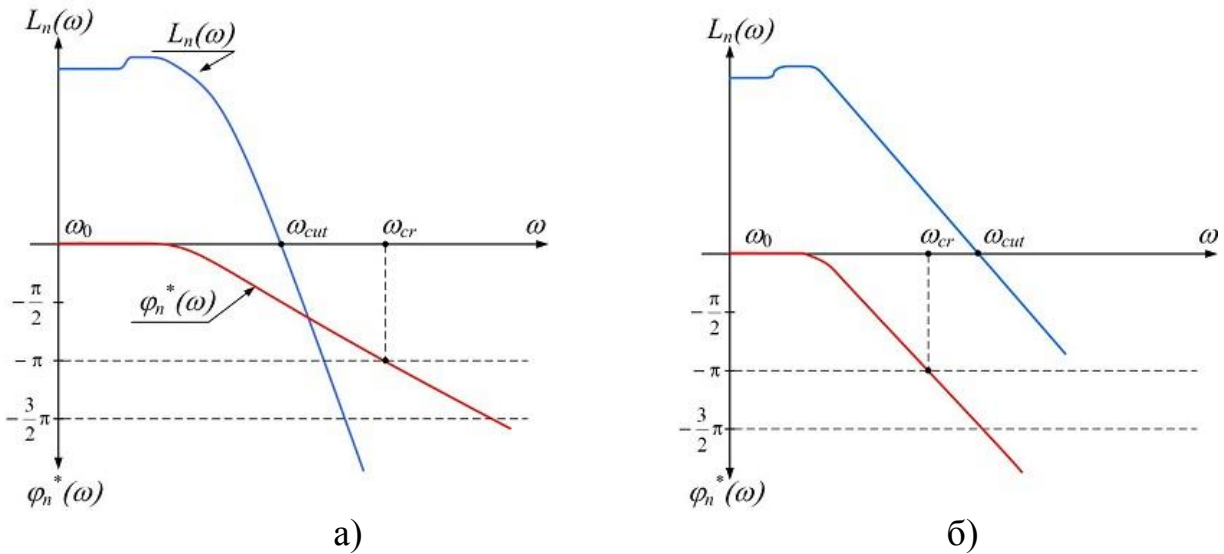


Рисунок 1 – Орієнтовні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ багатовимірної лінійної динамічної системи для випадків, коли (а)  $\omega_{cut} < \omega_{cr}$  та коли (б)  $\omega_{cut} > \omega_{cr}$

Алгоритм методу базується на розв'язанні системи чотирьох рівнянь відносно невідомих  $K_3, a_1, a_2, a_3$ , два з яких синтезуються з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною частотою  $\omega_0$  та частотою зрізу  $\omega_{cut}$  –

$$L_n(\omega_0) = L_3(\omega_0), \quad L_n(\omega_{cut}) = L_3(\omega_{cut}) = 0, \quad (5)$$

а інші два синтезуються за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням логарифмічних амплітудних частотних характеристик та критерію

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L_n(\omega_s) - L_3(\omega_s))^2 \quad (6)$$

на частотному відрізку від  $\omega_0$  до  $\omega_{cut}$ .

Запропонований метод синтезу та ідентифікації еквівалентних моделей трансформовано на багатовимірні неперервні лінійні мінімально-фазові динамічні об'єкти, що описуються диференціальними рівняннями з похідними у правій частині (3). Синтезовано алгоритм ідентифікації еквівалентних моделей (4), який у цьому випадку зводиться до синтезу і розв'язання системи 6 рівнянь з 6 невідомими  $a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2$ , два з яких складаються з використанням умови рівності (5) в двох характерних точках значень ЛАЧХ  $L_n(\omega)$  лінійної динамічної системи, що еквівалентується, зі значеннями ЛАЧХ  $L_3(\omega)$  еквівалентної системи, а для синтезу інших чотирьох рівнянь використовується процедура методу найменших квадратів на основі критерію (6) в проміжку між цими точками.

Для замкнених мінімально-фазових лінійних багатовимірних динамічних об'єктів, математичні моделі розімкнутого контуру яких не мають похідних у правій частині диференціальної математичної моделі, вперше розроблено метод

ідентифікації процесів у них математичними моделями не вище третього порядку (2), еквівалентними за критичною частотою  $\omega_{cr}$ . Алгоритм методу базується на синтезі та розв'язанні системи чотирьох рівнянь відносно невідомих  $K_3, a_1, a_2, a_3$ , два з яких синтезуються з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною  $\omega_0$  та критичною частотами  $\omega_{cr}$  –

$$L_n(\omega_0) = L_3(\omega_0), \quad \varphi_n(\omega_{cr}) = \varphi_3(\omega_{cr}) = -\pi, \quad (7)$$

а інші два синтезуються за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням того ж таки критерію (6), але на частотному відрізку від  $\omega_0$  до  $\omega_{cr}$ . Тут варто нагадати сутність критерію стійкості Найквіста, згідно з яким, лише коли виконується нерівність  $\omega_{cut} < \omega_{cr}$ , стійка розімкнута динамічна система при її замиканні одиничним негативним зворотнім зв'язком залишається стійкою. Якщо ж має місце нерівність  $\omega_{cut} > \omega_{cr}$ , то стійка розімкнута динамічна система при її замиканні одиничним негативним зв'язком втрачає стійкість і стає нестійкою. Ось чому при синтезі еквівалентної математичної моделі критична частота  $\omega_{cr}$  динамічної системи, розімкнутий контур якої замикається одиничним негативним зворотнім зв'язком і для спрощення аналізу еквівалентується, повинна залишатись після еквівалентування такою ж, якою вона була до еквівалентування, а тому виступає в ролі критерію.

Запропонований метод синтезу та ідентифікації еквівалентних моделей трансформовано на замкнуті багатовимірні неперервні лінійні мінімально-фазові динамічні об'єкти, розімкнуті контури яких описуються диференціальними рівняннями з похідними у правій частині (3), що є характерним для систем автоматичного керування з ПД-регуляторами. Синтезовано алгоритм ідентифікації еквівалентних моделей (4), який у цьому випадку зводиться до синтезу і розв'язання системи 6 рівнянь з 6 невідомими  $a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2$ , два з яких складаються з використанням умов (7) у двох характерних точках значень ЛАЧХ та ЛФЧХ лінійної динамічної системи, що еквівалентується  $L_n(\omega)$ ,  $\varphi_n(\omega)$ , зі значеннями ЛАЧХ та ЛФЧХ еквівалентної системи  $L_5(\omega)$ ,  $\varphi_5(\omega)$ , а для синтезу інших чотирьох рівнянь використовується процедура методу найменших квадратів на основі критерію (6) в проміжку між цими точками.

Акцентовано на тому, що еквівалентні математичні моделі лінійного багатовимірного мінімально-фазового динамічного об'єкту, синтезовані з використанням частоти зрізу  $\omega_{cut}$  та критичної частоти  $\omega_{cr}$ , відрізняються, що є ще одним доказом того, що будувати еквівалентні математичні моделі необхідно з урахуванням як характеру процесів в динамічному об'єкті високого порядку, так і характеру задачі, що покладається на нього.

Процес синтезу еквівалентної моделі динамічного об'єкта обов'язково повинен завершуватись перевіркою цієї моделі на адекватність, критерій та алгоритм якої теж викладено в другому розділі. Як видно з рис. 2, похибку еквівалентування моделями (2), (4) багатовимірного динамічного об'єкта в частотній області можна записати так –

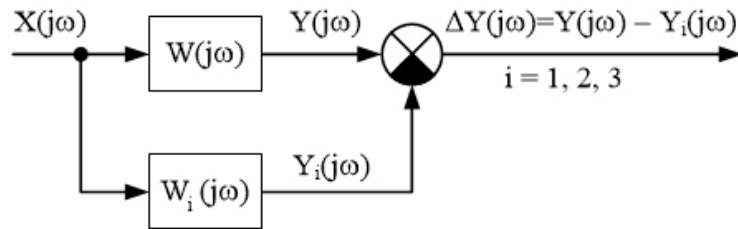


Рисунок 2 – Структурна схема формування похибки еквівалентування багатовимірною неперервного лінійного динамічного об'єкта

$$\begin{aligned} \Delta Y_i(j\omega) &= Y(j\omega) - Y_i(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega) - W_i(j\omega)X(j\omega) = \\ &= (W(j\omega) - W_i(j\omega))X(j\omega) = W_{\Delta i}(j\omega)X(j\omega), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $W_{\Delta i}(j\omega)$  – АФЧХ динамічного об'єкта по похибці еквівалентування, або –

$$\Delta Y_i(\omega) e^{j\varphi_{\Delta i}(\omega)} = A_{\Delta i}(\omega)X(\omega) e^{j(\varphi_{\Delta i}(\omega) + \varphi_X(\omega))}, \quad (9)$$

звідки випливає, що АЧХ динамічного об'єкта по похибці еквівалентування –

$$\Delta Y_i(\omega) = A_{\Delta i}(\omega)X(\omega), \quad (10)$$

де  $X(\omega)$  – АЧХ вхідного сигналу динамічного об'єкта.

Використовуючи рівність Парсеваля, середній квадрат похибки  $\overline{\Delta y_i(t)}$ , який характеризує її середню потужність, можна визначити з виразу –

$$\overline{\Delta y_i(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Delta Y_i(\omega)]^2 d\omega, \quad (11)$$

Найбільшою середня похибка  $\overline{\Delta y_i(t)}$  буде при відпрацюванні динамічним об'єктом стрибкоподібного вхідного сигналу –

$$x(t) = 1(t), \quad (12)$$

для якого –

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (13)$$

Із виразів, наведених вище, випливає, що –

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_i(t)} &\approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s)X(\omega_s)]^2 = \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m \left[ A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s)\cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s)) \right] \frac{1}{\omega_s^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

де  $\Delta\omega$  — інтервал дискретизації по частоті в логарифмічному масштабі,  $\omega_{max}$  – верхня частота смуги пропускання динамічного об'єкта, а кількість дискрет  $m$

знаходиться із виразу:  $m = \frac{\omega_{max} - \omega_0}{\Delta\omega}$ .

По аналогії середню потужність  $\overline{y(t)}$  вихідного сигналу  $y(t)$  динамічного об'єкту як його реакцію на вхідний одиничний сигнал (12), (13) можна представити у вигляді –

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [Y(\omega)]^2 d\omega \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A(\omega_s)X(\omega_s)]^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m A^2(\omega_s) \frac{1}{\omega_s^2}. \quad (15)$$

А тому відносний середній квадрат похибки еквівалентування  $\overline{\delta y_i(t)}$ , виражений в процентах, можна представити у вигляді –

$$\overline{\delta y_i(t)} = \frac{\Delta y_i(t)}{y(t)} 100\%, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Розраховуючи за виразом (16) середній квадрат похибки еквівалентування, і приймається рішення є задовільною вибрана еквівалентна модель багатовимірного динамічного об'єкта чи ні.

У **третьому розділі** запропоновано метод синтезу еквівалентних математичних моделей мінімально-фазових динамічних систем високого порядку (1) з перехідними характеристиками, представленими на рис. 3,

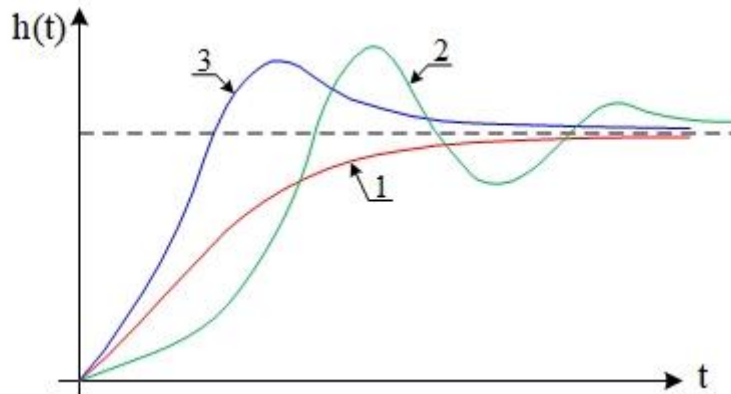


Рисунок 3 – Графіки перехідних функцій динамічних систем із класу МФС при різному характері полюсів їх передаточних функцій

та ЛАЧХ і ЛФЧХ, представленими на рис. 4 –

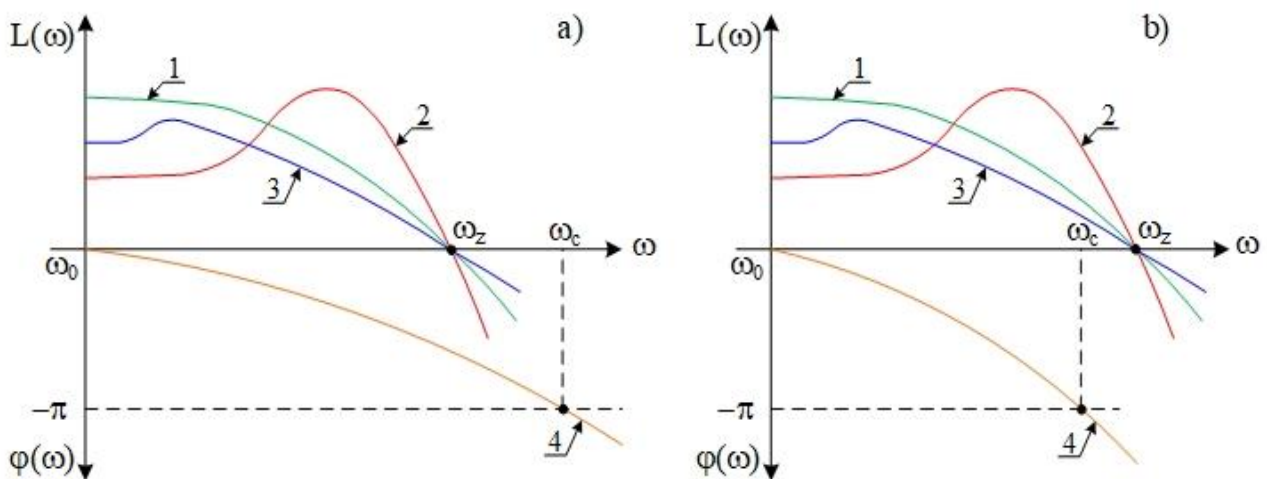


Рисунок 4 – Орієнтовні графіки ЛАЧХ (а) і ЛФЧХ (б) МФС динамічних систем

в класі немінімально-фазових не вище другого порядку –

$$a_1^* \frac{dy}{dt} + y(t) = b_0^* x(t - \tau) 1(t - \tau), \quad (17)$$

$$a_2^* \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1^* \frac{dy}{dt} + y(t) = b_0^* x(t - \tau) 1(t - \tau), \quad (18)$$

орієнтовні та відповідні їм асимптотичні ЛАЧХ яких зображені на рис. 5a,b,c.

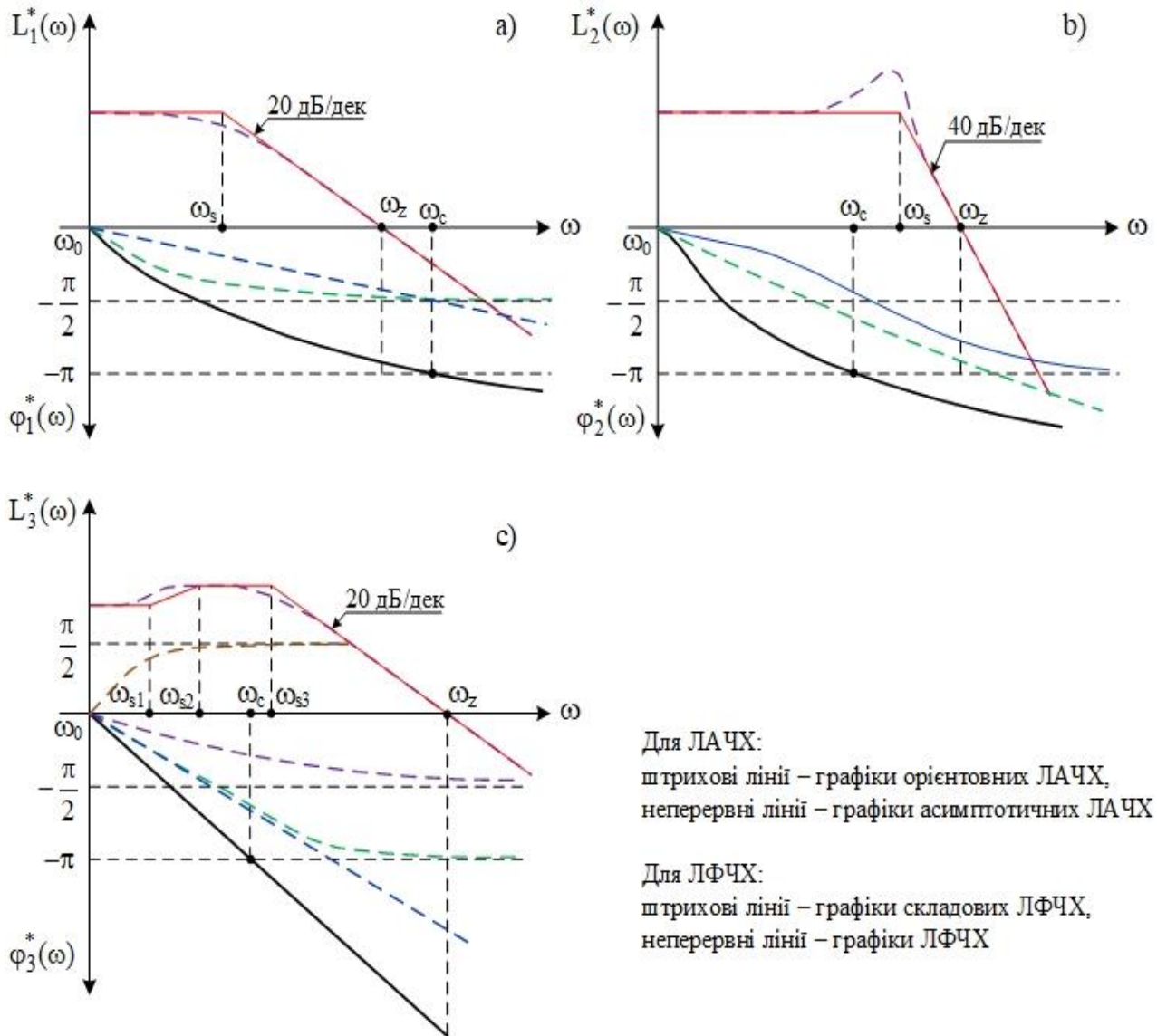


Рисунок 5 – Орієнтовні та асимптотичні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ немінімально-фазових динамічних систем

Метод ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних математичних моделей має алгоритм, занурений у частотну область. У випадку еквівалентування динамічного об'єкту без зворотного зв'язку алгоритм має чотири етапи і дозволяє еквівалентувати динамічну систему із класу МФС у класі НМФС, для визначення невідомих параметрів  $b_0^*, a_1^*, \tau$  в разі еквівалентування виразом (17) якої складається система із трьох рівнянь, що впливають із співставлення відповідних графіків на рис. 4 і рис. 5 та мають вигляд –

$$\begin{cases} L(\omega_0) = L_1^*(\omega_0), \\ L(\omega_z) = L_1^*(\omega_z), \\ \varphi(\omega_z) = \varphi_1^*(\omega_z). \end{cases} \quad (19)$$

а для визначення невідомих параметрів  $b_0^*, a_2^*, a_1^*, \tau$  в разі еквівалентування виразом (18) якої складається система із трьох рівнянь та однієї нерівності, що впливають із співставлення відповідних графіків на рис. 4 і рис. 5 та мають

ВИГЛЯД –

$$\begin{cases} L(\omega_0) = L_2^*(\omega_0), \\ L(\omega_z) = L_2^*(\omega_z), \\ \varphi(\omega_z) = \varphi_2^*(\omega_z), \\ L(\omega_s) < L_2^*(\omega_s). \end{cases} \quad (20)$$

І для еквівалентування замкнених систем автоматичного керування лінійними мінімально-фазовими динамічними об'єктами з ПД-регуляторами, процеси в яких описуються математичними моделями у вигляді звичайних лінійних диференціальних рівнянь високого порядку (3), запропоновано аналогічний метод синтезу математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь не вище другого порядку в класі немінімально-фазових –

$$a_2^* \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1^* \frac{dy}{dt} + y(t) = \left[ b_2^* \frac{d^2 x(t-\tau)}{dt^2} + b_1^* \frac{dx(t-\tau)}{dt} + b_0^* x(t-\tau) \right] l(t-\tau), \quad (21)$$

тобто, у вигляді диференціальних моделей не вище другого порядку з аргументом, який запізнюється на певний час  $\tau$  в процесі проходження сигналу зі входу системи на вихід. І в алгоритмі ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних моделей в якості методу ідентифікації параметрів  $\{b_2^*, b_1^*, b_0^*, a_2^*, a_1^*, \tau\}$  еквівалентних немінімально-фазових моделей мінімально-фазових динамічних об'єктів з від'ємним зворотнім зв'язком теж використано метод найменших квадратів, але з використанням критерію

$$\Sigma_5^{\varphi} = \sum_{s=1}^N (\varphi_n(\omega_s) - \varphi_5(\omega_s))^2, \quad (22)$$

а в якості головного обмеження при розв'язанні задачі пошуку оптимальних значень параметрів цих еквівалентних моделей використано рівність критичної частоти еквівалентної системи та системи, що еквівалентується, тобто, співвідношення (7), але записаного для відповідної фазової характеристики.

У цьому ж розділі в якості прикладу еквівалентування замкнутої системи автоматизованого керування в класі немінімально-фазових динамічних систем розв'язано задачу синтезу еквівалентної математичної моделі для системи керування електроприводом електромобіля по каналу «напруга силової акумуляторної батареї – швидкість електромобіля», структурна схема якої зображена на рис. 6.

Процес розповсюдження сигналу зі входу цієї розімкнутої системи на вихід у класі МФС описується диференціальним рівнянням (чи передаточною функцією) з порядком, не нижчим тринадцятого, але в результаті розв'язання задачі еквівалентування отримано еквівалентну немінімально-фазову математичну модель розімкнутого контуру лінійної мінімально-фазової динамічної системи автоматизованого керування динамічним об'єктом у вигляді диференціального рівняння з аргументом, що запізнюється, у вигляді:

$$0,11 \frac{d^2 l}{dt^2} + 0,4 \frac{dl}{dt} + l(t) = 3x(t-0,27)l(t-0,27). \quad (23)$$

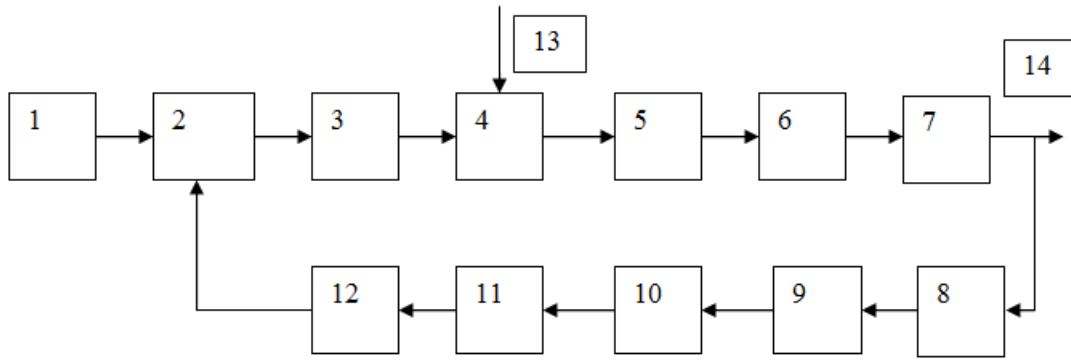


Рисунок 6 – Структурна схема системи керування електроприводом електромобіля: 1 – силова акумуляторна батарея, 2 – регулятор напруги, яка подається на якір тягового електродвигуна, 3 – тяговий електродвигун, 4 – блок вироблення різниці тягового і навантажувального моментів, 5 – інтегратор різниці моментів для отримання кутової швидкості тахогенератора, 6 – перетворювач кутової швидкості в лінійну, 7 – таблиця лінійної швидкості, 8 – очі водія, 9 – мозок водія, 10 – опорно-руховий апарат водія, 11 – педаль акселератора, 12 – перетворювач лінійного переміщення акселератора в керуючий сигнал регулятора напруги, 13 – момент навантаження, 14 – лінійна швидкість електромобіля

У четвертому розділі доведено, що оптимальною математичною моделлю центрованого стаціонарного часового ряду  $z_t$ , який є стохастичною моделлю процесу в дискретному динамічному об'єкті, замкнутому через ПД-регулятор, є модель авторегресії-ковзного середнього АРКС(3,3), що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по складовій ковзного середнього, тобто має вигляд –

$$z_t = \lambda_1 z_{t-1} + \lambda_2 z_{t-2} + \lambda_3 z_{t-3} + \xi_t - \theta_1 \xi_{t-2} - \theta_2 \xi_{t-2} - \theta_3 \xi_{t-3}. \quad (24)$$

В якості критеріїв оптимальності для цього доведення вибрано умову закладення в модель інформації про критичну частоту спектра об'єкта та умову закладення в модель інформації про напрям і зміну напрямку тренду згідно з рис. 7.

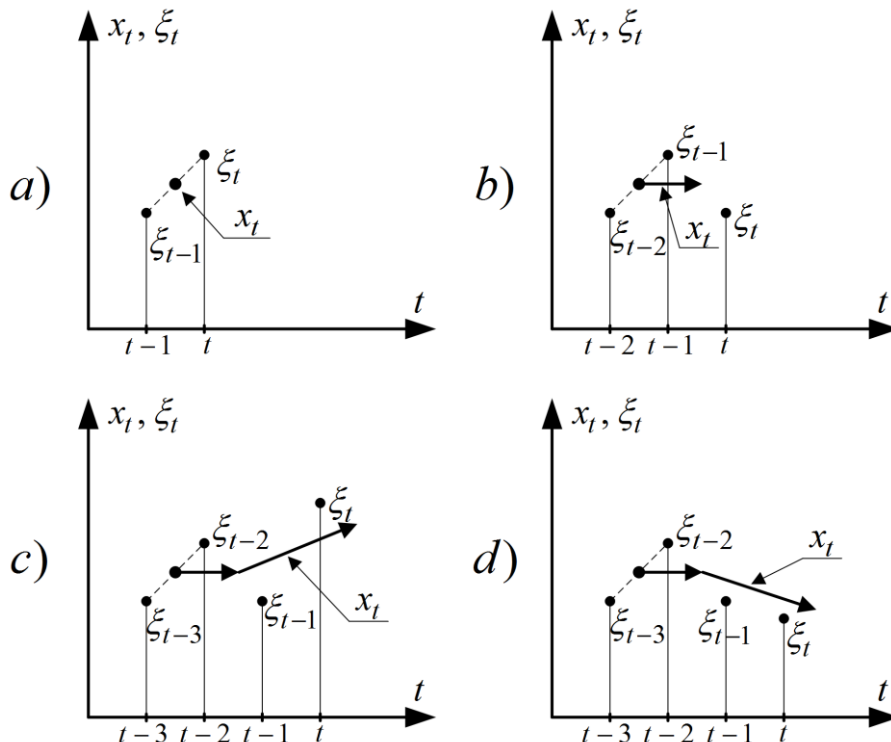


Рисунок 7 – Графічне обґрунтування вибору кількості членів у моделі (24)



У цьому ж розділі метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем з нелінійними характеристиками у вигляді поліномів та моделями інерційної частини у вигляді амплітудно-фазових частотних характеристик, розроблений Б. І. Мокіним та О. Б. Мокіним, який базується на алгоритмі переведення кратних інтегралів Вольтерра, заданих у часовій області, в однократні інтеграли, для розв'язання яких використовуються амплітудно-фазові частотні характеристики інерційної частини цих систем, узагальнено та поширено на задачі еквівалентування нелінійних динамічних систем з довільним порядком їх нелінійних характеристик та другим порядком передаточних функцій їх інерційних складових. На прикладі нелінійних динамічних систем з третім порядком нелінійної характеристики та другим порядком інерційної частини цих систем конкретизовано алгоритми параметричної ідентифікації їх еквівалентних моделей.

У додатках наведено документи, що підтверджують практичне значення і впровадження результатів дисертаційної роботи та список опублікованих праць за темою дисертації.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язана наукова задача по створенню методів синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей мінімального порядку, які адекватно описують процеси в багатовимірних динамічних об'єктах, і отримані результати, що доповнюють теорію синтезу та ідентифікації математичних моделей складних динамічних систем в частині розв'язання задач їх еквівалентування. В результаті дисертаційного дослідження отримано наступні результати.

1. Здійснено аналіз наукових праць, опублікованих за темою дисертації, і показано, що: по-перше, автори наукових праць, присвячених синтезу та ідентифікації математичних моделей процесів у багатовимірних лінійних неперервних динамічних об'єктах, або не ставили перед собою задачу синтезу моделей цього класу мінімального порядку, або використовували математичні моделі не вище другого порядку, не ставлячи перед собою задачу доведення їх адекватності реальним процесам в об'єктах, для опису яких вони використовуються; по-друге, автори наукових праць, присвячених синтезу авторегресійних математичних моделей дискретних лінійних динамічних об'єктів, ідентифікуючи їх, не ставили перед собою задачу оцінювання їх оптимальної складності; а по-третє, автори наукових праць, присвячених синтезу математичних моделей нелінійних динамічних об'єктів на основі інтегрального рівняння Вольтерра, не використали до кінця усі можливості, які надає це інтегральне рівняння при розв'язанні задач синтезу еквівалентних математичних моделей, адекватних реальним процесам, що мають місце в нелінійних неперервних динамічних об'єктах високої розмірності, а тому залишили поле пошуку нових наукових результатів у вказаних напрямках вдосконалення теорії синтезу та ідентифікації математичних моделей складних динамічних систем.

2. Вперше доведено, що процеси в мінімально-фазових динамічних

об'єктах, що мають від'ємні зворотні зв'язки і описуються лінійними диференціальними рівняннями високих порядків, можна еквівалентно описувати, не виходячи за клас мінімально-фазових, диференціальними рівняннями мінімального порядку, що дорівнює сумі максимального порядку похідної у правій частині та числа три. І, як наслідок, доведено, що процеси в багатовимірних неперервних лінійних мінімально-фазових динамічних об'єктах, що описуються диференціальними рівняннями з похідними у правій частині, до яких відносяться як системи автоматичного керування з ПД-регуляторами, так і системи автоматичного керування з ПДД-регуляторами, не можуть мати в еквівалентних моделях у класі МФС порядок, менший чотирьох для систем з ПД-регуляторами, і менший п'яти для систем з ПДД-регуляторами.

3. Для мінімально-фазових лінійних багатовимірних динамічних об'єктів, що працюють в режимі прямої передачі сигналу і не мають похідних у правій частині диференціальної математичної моделі, вперше розроблено метод синтезу та ідентифікації процесів у них математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу. Алгоритм методу базується на системі рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною частотою та частотою зрізу, а друга частина синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням логарифмічних амплітудних частотних характеристик. З використанням цієї ж ідеології запропоновано метод синтезу та ідентифікації еквівалентних моделей багатовимірних неперервних лінійних мінімально-фазових динамічних об'єктів, що описуються диференціальними рівняннями з похідними у правій частині. Синтезовано алгоритми ідентифікації таких еквівалентних моделей, які умову рівності у двох характерних точках значень ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутої лінійної динамічної системи, що еквівалентується, зі значеннями ЛАЧХ та ЛФЧХ еквівалентної системи поєднують з методом найменших квадратів у проміжку між цими точками.

4. Для замкнутих мінімально-фазових лінійних багатовимірних динамічних об'єктів, математичні моделі розімкнутого контуру яких не мають похідних у правій частині диференціальної математичної моделі, вперше розроблено метод ідентифікації процесів у них математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за критичною частотою. Алгоритм методу базується на системі рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються мінімальною та критичною частотами, а друга частина синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів з використанням логарифмічних амплітудних частотних характеристик. З використанням цієї ж ідеології запропоновано метод синтезу та ідентифікації еквівалентних моделей замкнутих багатовимірних неперервних лінійних мінімально-фазових динамічних об'єктів, розімкнуті контури яких описуються диференціальними рівняннями з похідними у правій частині, що є характерним для систем автоматичного керування з ПД- та ПДД-регуляторами. Синтезовано алгоритми ідентифікації таких еквівалентних моделей, які умову рівності у двох характерних точках значень ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутої лінійної динамічної системи, що еквівалентується, зі значеннями ЛАЧХ та ЛФЧХ еквівалентної системи поєднують з методом найменших квадратів у проміжку між цими точками, в структурі критерію

оптимізації якого використовуються логарифмічні амплітудні частотні характеристики. Показано, що еквівалентні математичні моделі лінійного багатовимірного мінімально-фазового динамічного об'єкту, синтезовані з використанням частоти зрізу та критичної частоти, відрізняються, що є ще одним доказом того, що будувати еквівалентні математичні моделі необхідно з урахуванням як характеру процесів у динамічному об'єкті високого порядку, так і характеру задачі, що покладається на нього. Для оцінювання точності еквівалентування лінійного динамічного об'єкта високого порядку вибраною еквівалентною математичною моделлю запропоновано використовувати відносний середній квадрат похибки еквівалентування, для якої отримано обчислювальну форму.

5. Запропоновано метод синтезу еквівалентних математичних моделей мінімально-фазових динамічних систем високого порядку, до яких відносяться і вимірювальні системи зі складною структурою, в класі немінімально-фазових не вище другого порядку, та метод ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних математичних моделей з алгоритмом, зануреним в частотну область. І для еквівалентування замкнутих систем автоматичного керування лінійними мінімально-фазовими динамічними об'єктами з ПД- та ПД-регуляторами, процеси в яких описуються математичними моделями у вигляді звичайних лінійних диференціальних рівнянь високого порядку, запропоновано аналогічний метод синтезу математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь не вище другого порядку в класі немінімально-фазових, тобто, у вигляді диференціальних моделей не вище другого порядку з аргументом, який запізнюється на певний час у процесі проходження сигналу зі входу системи на вихід. В алгоритм ідентифікації синтезованих у такий спосіб еквівалентних моделей теж покладене занурення математичних моделей, визначених на часовій осі, в частотну область. Для побудови розрахункових співвідношень розроблених методів ідентифікації еквівалентних моделей у цьому випадку запропоновано використовувати не логарифмічні – ЛАЧХ та ЛФЧХ, а амплітудну (АЧХ) та фазову (ФЧХ) частотні характеристики. В якості критерію оптимізації параметрів еквівалентних немінімально-фазових моделей мінімально-фазових динамічних об'єктів з від'ємним зворотнім зв'язком теж використано критерій найменших квадратів, а в якості головного обмеження при розв'язанні задачі пошуку оптимальних значень параметрів цих еквівалентних моделей використано рівність критичної частоти еквівалентної системи та системи, що еквівалентується, оскільки, як відомо, саме значенням критичної частоти визначається здатність лінійної динамічної системи зберігати чи втратити стійкість при її замиканні одиничним від'ємним зворотнім зв'язком, тож при еквівалентуванні необхідно для еквівалентної моделі встановлювати те ж значення критичної частоти, яке має реальна динамічна система, еквівалентна математична модель якої синтезується.

6. Доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду, який є стохастичною моделлю процесу в дискретному динамічному об'єкті, є модель авторегресії-ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по складовій ковзного середнього. В якості критеріїв оптимальності для цього доведення вибрано умову закладення в модель інформації про критичну частоту спектра об'єкта, процеси в якому моделюються,

та умову закладення в модель інформації про напрям і зміну напрямку тренду ковзного середнього. Завдяки цьому доведенню, підвищується ступінь адекватності моделі авторегресії-ковзного середнього  $АРКС(p,q)$  з довільними значеннями порядків  $p, q$ , а також спрощується застосування методу ідентифікації цієї моделі, який методикою, розроблену Юлом та Уокером для ідентифікації моделі авторегресії  $АР(p)$ , узагальнює на випадок, коли авторегресійна складова моделі  $АР(p)$  доповнюється складовою ковзного середнього  $КС(q)$ , оскільки для реалізації алгоритму цього методу, запропонованого Мокіним Б. І., Мокіним В. Б. та Мокіним О. Б., необхідно на першому етапі розв'язувати систему лінійних рівнянь типу Юла-Уокера для визначення  $p$  параметрів авторегресії з використанням одного набору автоковаріацій, на другому етапі розв'язувати систему додаткових нелінійних рівнянь для ідентифікації  $q-1$  параметрів ковзного середнього з використанням іншого набору автоковаріацій, а на третьому етапі здійснювати формульне до визначення останнього параметру ковзного середнього та до визначення значення дисперсії білого шуму, котрий необхідно «підмішувати» до моделі  $АРКС(p,q)$  для забезпечення її адекватності реальному часовому ряду.

7. Метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем з нелінійними характеристиками у вигляді поліномів та моделями інерційної частини у вигляді амплітудно-фазових частотних характеристик, який базується на алгоритмі переведення кратних інтегралів Вольтерра, заданих у часовій області, в однократні інтеграли, для розв'язання яких використовуються амплітудно-фазові частотні характеристики інерційної частини цих систем, поширено на задачі еквівалентування нелінійних динамічних систем з довільним порядком їх нелінійних характеристик та другим порядком передаточних функцій їх інерційних складових. На прикладі нелінійних динамічних систем з третім порядком нелінійної характеристики та другим порядком інерційної частини цих систем конкретизовано алгоритми параметричної ідентифікації їх еквівалентних моделей.

8. Ефективність запропонованих методів синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів підтверджена в процесі синтезу еквівалентних математичних моделей систем керування електроприводом електромобілів.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "До питання вибору оптимальної математичної моделі стаціонарного часового ряду", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №4, с. 74-80, 2018.

[2]. О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу", *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, №3, 2014. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/415>. Дата звернення: Лис. 15, 2018.

[3]. О. Б. Мокин, В. Б. Мокин, Б. І. Мокин, та І. О. Чернова, "Ідентифікація еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №5, с. 9-14, 2014.

[4]. А. Б. Мокин, В. Б. Мокин, Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Определение условий и разработка методов описания процессов в сложных динамических объектах эквивалентными моделями не выше третьего порядка", *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*, № 2, с. 37-49, 2016.

[5]. Б. И. Мокин, и И. А. Чернова, "Построение математической модели минимального порядка для линейной динамической системы с обратной связью", *Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики"*, №2, с. 59-66, 2017.

[6]. Б. І. Мокин, В. Б. Мокин, О. Б. Мокин, та І. О. Чернова, "Еквівалентування моделей мінімально-фазових лінійних систем автоматичного керування з ПІД-регуляторами в класі немінімально-фазових", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 81-88, 2018.

[7]. В. Б. Мокин, О. Б. Мокин, Б. І. Мокин, С. О. Довгополюк, та І. О. Чернова, "Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №6, с. 111-121, 2017.

[8]. Б. І. Мокин, О. Б. Мокин, І. О. Чернова, та С. О. Довгополюк, "Еквівалентування замкнутої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі", *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, №3, с. 68-76, 2017.

[9]. A. V. Mokin, V. B. Mokin, B. I. Mokin, and I. A. Chernova, "Determining the Conditions and Designing the Methods for Description of Processes in Complex Dynamic Objects by Equivalent Models not Higher than the Third-Order", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, issue 3, pp. 83-97, 2016.

[10]. B. I. Mokin, and I. A. Chernova, "Construction of a Mathematical Model of the Minimum Order for a Linear Dynamical System With Feedback", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 49, issue 3, pp. 69-77, 2017.

[11]. Б. І. Мокин, та І. О. Чернова, "Узагальнення Фур'є-інтегрального метода ідентифікації на еквівалентні математичні моделі нелінійних динамічних систем з другим порядком їх інерційної складової", на *XIV Міжн. наук. конф. Контроль і управління в складних системах (КУСС-2018)*, Вінниця, 2018, с. 22.

[12]. B. I. Mokin, and I. O. Chernova, "Equivalent to the Critical Frequency Mathematical Model of Minimum Order for a Complex Dynamic Object", на *XXII Міжн. наук. конференції з автоматичного управління «Автоматика 2015»*, Одеса, 2015, с. 12-13.

[13]. В. Б. Мокин, О. Б. Мокин, Б. І. Мокин, С. О. Довгополюк, та І. О. Чернова, "Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі немінімально-фазових", на *IV Міжн. наук. конф. «Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах (ВКДТС-2017)»*, Вінниця, 2017, с. 162.

[14]. B. I. Mokin, O. B. Mokin, V. B. Mokin, and I. O. Chernova, "Mathematical Models of Minimum Order for Complex Systems Equivalent Regarding Cutoff Frequency", in *Proc. 3rd Intern. Scien. Conf. Nonlinear analysis and applications*, Kiyv, 2015, pp. 40-41.

[15]. Б. І. Мокин, и И. А. Чернова, "Эквивалентирование линейной динамической системы, исходная математическая модель которой имеет производные в правой части", на *XXIII Міжн. конф. з автоматичного управління «Автоматика 2016»*, Суми, 2016, с. 26-28.

[16]. Б. І. Мокін, та І. О. Чернова, "Еквівалентні моделі динамічних систем з операцією диференціювання у правій частині", на *XLV Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2016)*, Вінниця, 2016, с. 2409-2410.

[17]. Б. І. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополок, "Новий підхід до визначення мінімально-допустимого порядку математичної моделі замкнутої системи автоматичного керування з ПД-регулятором", на *XLVI Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2017)*, Вінниця, 2017, с. 1561-1563.

[18]. Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, та С. О. Довгополок, "Синтез математичних моделей замкнутих систем автоматичного керування з ПД-регуляторами в немінімально-фазовому просторі", на *XLVII Науково-техн. конф. підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2018)*, Вінниця, 2018, с. 1787-1789.

## АНОТАЦІЯ

**Чернова І. О. Методи синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Вінницький національний технічний університет. Вінниця, 2019.

**Робота присвячена** створенню методів синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей мінімального порядку для багатовимірних динамічних об'єктів.

Доведено, що мінімально-фазові багатовимірні динамічні об'єкти, що мають від'ємні зворотні зв'язки, можна еквівалентно описувати, не виходячи за клас мінімально-фазових, диференціальними рівняннями з порядком, що дорівнює сумі порядку старшої похідної у правій частині та числа три.

Для мінімально-фазових лінійних багатовимірних динамічних об'єктів, що працюють у режимі прямої передачі сигналу, вперше розроблено метод синтезу та ідентифікації процесів у них моделями мінімального порядку в класі мінімально-фазових, еквівалентними за частотою зрізу.

Для замкнутих мінімально-фазових лінійних багатовимірних динамічних об'єктів вперше розроблено метод синтезу та ідентифікації процесів у них математичними моделями мінімального порядку в класі мінімально-фазових, еквівалентними за критичною частотою.

Запропоновано метод синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей мінімально-фазових динамічних систем високого порядку в класі немінімально-фазових з порядком, не вищим другого.

Доведено, що оптимальною математичною моделлю стаціонарного часового ряду, який є моделлю процесу в стохастичному дискретному динамічному об'єкті, є модель авторегресії-ковзного середнього, що має третій порядок і по авторегресійній складовій, і по ковзному середньому.

Узагальнено метод синтезу математичних моделей нелінійних динамічних систем з нелінійними характеристиками та моделями інерційної частини першого порядку на задачі еквівалентування нелінійних динамічних систем з другим порядком інерційної частини.

Практична цінність отриманих в дисертації результатів полягає у тому, що вони доповнюють теорію синтезу та ідентифікації математичних моделей багатовимірних динамічних об'єктів умовами їх еквівалентування математичними моделями мінімально-допустимого порядку.

**Ключові слова:** мінімально-фазова система, немінімально-фазова система, лінійні багатовимірні неперервні та дискретні динамічні об'єкти, стохастичні та нелінійні динамічні об'єкти, математичні моделі у формі диференціальних рівнянь, передаточних функцій, частотних характеристик та інтегралів Вольтерра, синтез математичних моделей в часовому просторі, на комплексній площині та у частотній області, еквівалентування, методи ідентифікації за частотою зрізу та критичною частотою, оптимізація параметрів моделей.

## АННОТАЦІЯ

**Чернова И. А. Методы синтеза и идентификации эквивалентных математических моделей многомерных динамических объектов - Квалификационный научный труд на правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 «Математическое моделирование и вычислительные методы». - Винницкий национальный технический университет. Винница, 2019.

**Работа посвящена** созданию методов синтеза и идентификации эквивалентных математических моделей минимального порядка для многомерных динамических объектов.

Доказано, что минимально-фазовые многомерные динамические объекты, имеющие отрицательные обратные связи, можно эквивалентно описывать, не выходя за класс минимально-фазовых, дифференциальными уравнениями с порядком, равным сумме порядка старшей производной в правой части и числа три.

Для минимально-фазовых линейных многомерных динамических объектов, работающих в режиме прямой передачи сигнала, впервые разработан метод синтеза и идентификации процессов в них моделями минимального порядка в классе минимально-фазовых, эквивалентными по частоте среза.

Для замкнутых минимально-фазовых линейных многомерных динамических объектов впервые разработан метод синтеза и идентификации процессов в них математическими моделями минимального порядка в классе

минимально-фазовых, эквивалентными по критической частоте.

Предложен метод синтеза и идентификации эквивалентных математических моделей минимально-фазовых динамических систем высокого порядка в классе неминимально-фазовых с порядком, не выше второго.

Доказано, что оптимальной математической моделью стационарного временного ряда, являющегося моделью процесса в стохастическом дискретном динамическом объекте, является модель авторегрессии-скользящего среднего, имеющая третий порядок и по авторегрессионной составляющей, и по скользящему среднему.

Обобщен метод синтеза математических моделей нелинейных динамических систем с нелинейными характеристиками и моделями инерционной части первого порядка на задачи эквивалентирования нелинейных динамических систем со вторым порядком инерционной части.

Практическая ценность полученных в диссертации результатов заключается в том, что они дополняют теорию синтеза и идентификации математических моделей многомерных динамических объектов условиями их эквивалентирования математическими моделями минимально допустимого порядка.

**Ключевые слова:** минимально-фазовая система, неминимально-фазовая система, линейные многомерные непрерывные и дискретные динамические объекты, стохастические и нелинейные динамические объекты, математические модели в форме дифференциальных уравнений, передаточных функций, частотных характеристик и интегралов Вольтерра, синтез математических моделей во временном пространстве, на комплексной плоскости и в частотной области, эквивалентирование, методы идентификации по частоте среза и критической частоте, оптимизация параметров моделей.

## ABSTRACT

**Chernova I. O. Methods of synthesis and identification of equivalent mathematical models of multidimensional dynamic objects – Qualification research paper, manuscript copyright.**

Thesis for the degree of a candidate of technical sciences in specialty 01.05.02 – «Mathematical Modeling and Computational Methods». – Vinnytsia National Technical University. Vinnytsia, 2019.

**Thesis** researches the creation of methods for synthesis and identification of mathematical models of minimum order for decreasing time when used in tasks of analysis and optimisation of processes in multidimensional dynamic objects.

For the first time the research proves that the process in minimum phase dynamic objects with negative feedback which are described by the linear differential equation of the high orders, may be equivalently described within the scope of minimum phase ones by the differential equations of minimum order, which equals the sum of maximum order of the derivative in the right part and a three num.

For the minimum phase linear multidimensional dynamic objects, that operate in the mode of the real time signal transmission and which do not have the derivatives in



the right part of the differential mathematical model, there had been for the first time developed the method for identification of the processes by the mathematical models not higher than that of the third order, equivalent as for the cutoff frequency. The algorithm of the method is based on the system of the equations, one part of which shall be synthesised with the consideration of the boundary conditions, set by the minimum frequency and cutoff frequency, and the other part shall be synthesised using the standard procedure of the least squares method with the use of Bode magnitude plots. The suggested method of synthesis and identification of the equivalent models had been transformed into the multidimensional continuous linear minimum phase dynamic objects, described by the differential equations with the derivatives in the right part.

For the closed minimum phase linear multidimensional dynamic objects, the mathematical models of the open loop of which do not have the derivatives in the right part of the differential mathematical model, there had been for the first time developed the method of synthesis and identification of processes by the mathematical models not higher than those of the third order, but equivalent as for the critical frequency. The suggested method of synthesis and identification of the equivalent models is transformed into the closed multidimensional continuous linear minimum phase dynamic objects, the open loops of which are described by the differential equations with the derivatives in the right part.

There had been suggested the method of synthesis and identification of the equivalent mathematical models of minimum phase dynamic systems of the high order with the algorithm, plunged into the frequency domain, in the class of non-minimum phase, that is, in the kind of differential models not higher than those of the second order with an argument, which is late by a certain time during the signal transmission from the input to the output of the system.

It had been proved that the optimal mathematical model of the stationary time series, which is the model of the process on the statistically distributed discrete dynamic object is the model of autoregression-moving average of the third order on the autoregressive component as well as on the component of the moving average. Entering information on the object's spectrum critical frequency as well as direction and redirection of the moving average trend on the model were the conditions, chosen as the optimal criteria to prove this argument.

There had been generalised the synthesis method of mathematical models of nonlinear dynamic systems with nonlinear characteristics in the form of polynomials and the models of inertial part in the form of magnitude and phase responses, which is based on the algorithm of converting multiple Volterra integral equations, set in the time domain, into the single integral equations, for the solution of which there used the magnitude and phase responses of the inertial part of these systems, on the tasks of reduction of nonlinear dynamic systems with random order of their nonlinear characteristics and the second order of the transfer functions of their inertia components. On the example of nonlinear dynamic systems with the third order of nonlinear characteristics and the second order of the inertia part of these systems there had been specified the algorithm of parametric identification of their equivalent models.

Practical value of the results obtained is that, first of all, they complement to the theory of synthesis and identification of the mathematical models of dynamic systems with the conditions of using the equivalent mathematical models with the minimum

allowed order instead of mathematical models of multidimensional dynamic objects, that is, objects of the high orders in the tasks of their analysis and optimisation, they also complement this theory with the methods for identification of the equivalent models, for which there had been created specific realisation algorithms and calculation correlations for the evaluation of the adequacy.

**Key words:** minimum phase system, non-minimum phase system, linear multidimensional continuous and discrete dynamic objects, stochastic and nonlinear dynamic objects, mathematical models in the form of differential equations, transfer functions, frequency responses and Volterra integral equations, synthesis of mathematical models in the time domain, plain of complex numbers and in frequency domain, reduction, methods of identification as for the cutoff frequency and critical frequency, optimisation of models parameters.

Підписано до друку 00.00.2019 р. Формат 29,7×42 ¼

Наклад 100 прим. Зам. № 2019-012

Віддруковано в інформаційному редакційно-видавничому центрі

Вінницького національного технічного університету

м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95. Тел.: 65-18-06

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.