

Національний університет “Львівська політехніка”

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПРОЦЬКО ІГОР ОМЕЛЯНОВИЧ

УДК 004.421.2:517.443

ДИСЕРТАЦІЯ

**ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ
ДІЙСНИХ ГАРМОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ
НА ОСНОВІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК**

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи

Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ І. О. Процько

Науковий консультант – Теслюк Василь Миколайович

доктор технічних наук, професор

Львів – 2019

АНОТАЦІЯ

Процько І. О. Підвищення ефективності обчислення дійсних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Національний університет “Львівська політехніка”, Львів. – Вінницький національний технічний університет, Вінниця. 2019.

Дисертація присвячена питанням дослідження та розвитку ефективного підходу обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень (дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі) на основі циклічних згорток.

Дискретні перетворення і згортка – два різні, але тісно взаємопов’язані процеси цифрового опрацювання інформації. Адже ефективне обчислення згортки реалізовується на основі теореми про швидку згортку, що базується на використанні швидких перетворень класу Фур’є. У цьому аспекті парадоксальним виглядає метод, за яким використовують для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень циклічну згортку. Перші публікації, присвячені обчисленню ДПФ на основі циклічних згорток, з’явилися у кінці 60-х років XX століття. Значний внесок у теорію і практику ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень у цьому напрямі внесли Ч. Рейдер, Л. Блюстейн, Дж. Кулі, Г. Нуссбаумер, Р. Блейхут, Ш. Віноград, В.-Ч. Сіу та ін. Цей підхід продовжують інтенсивно вивчати та розвивати на програмному й апаратному рівнях. Відомі наукові роботи з швидких перетворень класу Фур’є вітчизняних науковців В. К. Задіраки, Л. А. Гнатіва, О. Б. Коханова, В. А. Лужецького, А. М. Терещенка, М. М. Яцимірського та ін.

Створене науково-інформаційне підґрунтя ставить актуальне завдання подальшого розвитку ефективного обчислення ДГП на основі ЦЗ щодо розроблення узагальненої методології, яка забезпечить створення ефективних

програмних та апаратних засобів комп'ютерної реалізації обчислення дискретних перетворень класу Фур'є.

Вирішено **актуальну науково-прикладну проблему** підвищення ефективності обчислювальних характеристик дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Наукова новизна отриманих результатів.

Вперше:

- розроблено узагальнену методологію на основі циклічного розкладу підстановки, яка дозволила якісно підвищити ефективність виконання обчислення ДГП через циклічні згортки завдяки можливості вибору довільного обсягу перетворення;
- розроблено метод обчислення примітивної підстановки у вигляді твірного масиву або спрощеного твірного масиву, доповненого масивом знаків, який, на відміну від існуючих, забезпечує підвищення ефективності швидшого визначення послідовності переставлення;
- розроблено метод побудови узагальненої блочно-циклічної структури базисної матриці ДГП, у якому, на відміну від відомих, використано твірний масив для табличного формування структури з використанням спрощених значень аргументів базисної функції зі знаком для перших елементів циклічних підматриць;
- розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення з використанням табличних координат, завдяки якому зменшуються обчислювальні затрати і підвищується ефективність аналізу блочно-циклічної структури базису перетворення ДГП;

вдосконалено:

- метод побудови блочно-циклічної структури базису перетворення для ДГП обсягів, що дорівнюють цілому степеню простого числа, на основі

закономірного нарощення горизонтальних лінійок у структурі базису зі збільшенням обсягу перетворення, який забезпечує можливість визначення кількості ідентичних підматриць залежно від значень простого числа обсягу та його степеня;

– метод аналізу ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення ДГП для складених значень обсягів, який полягає у спрощенні пошуку за координатами ідентичних підматриць, що містять елементи, кратні обсягу перетворення, завдяки чому підвищується ефективність тривалості визначення наборів ідентичних підматриць;

– систему взаємозв'язку етапів обчислення твірних масивів, скороченої кількості гармонічних коефіцієнтів, кількості та обсягу циклічних згорток, що забезпечує можливість гнучкої адаптації виконання ДГП до відповідних програмних та апаратних обчислювальних ресурсів;

отримали подальший розвиток:

– схемна модель взаємозв'язку обчислювальних підзадач, яка дає змогу проводити послідовно-паралельну організацію обчислень дійсних ДГП на основі циклічних згорток;

– метод розроблення обчислювальних структурних схем із використанням блоків виконання циклічних згорток, який забезпечує можливість підвищити ефективність у вигляді показника площа-затримка в мікросхемах обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

У першому розділі дисертації проаналізовано ефективні методи обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі швидких циклічних згорток. Однак, більшість методів обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток застосовуються для простих та цілих степенів простих обсягів перетворення (алгоритм Рейдера, Вінограда) або мають квадратичну обчислювальну складність (алгоритм Герцеля, Блюстейна). Стандартизовані ISO/IEC дискретні косинусні та синусні перетворення ще недостатньо досліджені та вивчені в аспекті ефективного обчислення. Тому розроблення узагальненої методології для синтезу швидких алгоритмів та побудови засобів

обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток є актуальним.

У другому розділі проаналізовано та обґрунтовано методологічні принципи та етапів для синтезу та обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Узагальнено методологію приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток, що дає змогу синтезувати алгоритми косинусного, синусного, перетворення Хартлі та їх видів незалежно від значення обсягу перетворення.

Для синтезу алгоритмів застосовано твірний масив, який визначається циклічним розкладом підстановки рядків/стовпців аргументів функції базису перетворення. Розвинуто метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення, що використовує твірні масиви.

У результаті розроблення узагальненої методології одержано систематизовану сукупність принципів, методів, алгоритмів, способів для синтезу ефективних алгоритмів обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток.

У третьому, четвертому та п'ятому розділах відповідно до методології формування циклічних структур у матриці аргументів базису дискретних гармонічних перетворень проаналізовано базиси та встановлено особливості синтезу алгоритмів обчислення кожного з чотирьох видів дискретних косинусних перетворень, дискретних синусних перетворень, дискретних перетворень Хартлі на основі циклічних згорток. Показано відповідність принципів узагальненої методології на конкретних прикладах формування блочно-циклічної структури базису перетворення для кожного з чотирьох основних видів кожного з перетворень дискретних гармонічних перетворень. Отримано зведені таблиці особливостей синтезу алгоритмів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі. У результаті синтезу алгоритму розроблено для конкретних прикладів структурні схеми модулів обчислення дискретних гармонічних перетворень.

У шостому розділі розглянуто обчислювальні затрати та засоби обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток. Проаналізовано кількісні характеристики підвищення ефективності обчислення ДГП на основі ЦЗ. Обчислювальні витрати залежать від типу та виду дискретних гармонічних перетворень, обсягу N перетворення, i -кількості та L_i - обсягів базових операцій циклічних згорток, тобто від блочно-циклічної структури ядра перетворення. Для дискретних гармонічних перетворень обсягів, що дорівнюють цілочисельному степеню простого числа, які характеризуються однотипним нарощенням блочно-циклічних структур, виключається етап аналізу ідентичних підматриць, що прискорює процес синтезу алгоритму. Обчислення циклічних згорток для послідовностей гармонічних коефіцієнтів із повторенням групи елементів, що зустрічаються в запропонованих алгоритмах, зменшує обсяг виконання циклічних згорток i , відповідно, обчислювальну складність дійсних дискретних гармонічних перетворень.

Розвинуто метод побудови структурних схем прямого і зворотного виконання дискретних гармонічних перетворень, що містять систолічні конвольвери для виконання циклічних згорток. На системному етапі проектування інтегральних схем виконання дискретних гармонічних перетворень, що є стратегічним, метод побудови структурних схем дозволяє вибрати на основі варіантів твірних масивів відповідну конкретну структуру обчислювального модуля, кількість та обсяги циклічних згорток. Поєднання з передовими рішеннями наступних етапів проектування дає покращення технічних характеристик при розробленні інтегральних схем обчислення дискретних гармонічних перетворень.

Практичне значення отриманих результатів. На основі узагальненої методології розроблено програмне забезпечення для швидкого обчислення дискретних гармонічних перетворень довільного обсягу на основі циклічних згорток. Наведено результати програмної реалізації синтезу алгоритмів та обчислення ДКП-II на основі циклічних згорток. Порівняння обчислення розробленого програмного забезпечення на основі циклічних згорток з програмою бібліотеки FFTW3 на універсальній комп'ютерній системі показує,

що час виконання розробленої тестової програми менший для коротких обсягів перетворення. Тому є актуальним застосування узагальненої методології ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для конструювання обчислень більших обсягів перетворень на основі коротких обсягів. Виконання ДГП на основі циклічних згорток, що базується на розроблених структурних схемах модуля обчислення ДГП, ефективно реалізується в інтегральних схемах, забезпечуючи зменшення площі зайнятості кристала завдяки локальності та регулярності зв'язків між процесорними елементами у блоках циклічних згорток.

Ключові слова: дійсний базис перетворення, синтез алгоритмів, циклічна згортка, твірний масив, дискретні гармонічні перетворення (ДГП), дискретні косинусні перетворення (ДКП), дискретні синусні перетворення (ДСП), дискретні перетворення Хартлі (ДПХ).

ABSTRACT

Ihor Prots'ko. Enhancement of the Efficient Computation of Real Harmonic Transforms Based on Cyclic Convolutions. – Qualified scientific work on the right of the manuscript.

Thesis for a scientific degree of Doctor of Engineering in the specialty 01.05.02 «Mathematical Modelling and Computation Methods». – Lviv Polytechnic National University, Lviv. – Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia. 2019.

The thesis is devoted to the research and development of an efficient approach for the computation of real discrete harmonic transforms (discrete cosine, sine and Hartley transform) based of cyclic convolutions.

Discrete transforms and convolutions represent two different but closely interrelated sections of digital processing of information. After all, an efficient computation of a convolution is realized on the basis of the fast convolution theorem, which is based on the use the fast transforms of Fourier class. In this aspect, the

method that uses cyclic convolutions to efficiently compute discrete harmonic transforms is a paradox. The first publications devoted to the computation of the DFT based on cyclic convolutions appeared in the late 60's. The significant contribution to the theory and practice of efficient computation of discrete harmonic transforms in this direction was made by C. M. Rader, L. I. Bluestein, J. W. Cooley, H.J. Nussbaumer, R. E. Blahut, S. Vinograd, V.-C. Siu. This approach continues to be intensively investigated and developed, both at the software and hardware levels. Consequently, the created scientific and informational basis of effective methods requires further development of research in the direction of developing a generalized methodology for the efficient computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions for software and hardware implementations that meet the requirements of modern scientific and technological progress.

The actual **scientific and applied problem** of increasing the efficiency of computational characteristics (the number of arithmetic operations, the number of cyclic convolutions, the run duration) of real discrete harmonic transforms is solved by developing a generalized methodology that solves the problem of forming and analyzing the structure of discrete harmonic constituents of the transformation basis in the form of a set of hankel circulants and performing calculations of transforms based on cyclic convolutions.

The scientific novelty of the obtained results.

For the first time offered:

- the generalized methodology has been developed based on the cyclic decomposition of substitution, which provides an opportunity of the enhancement the efficient computation of DHT based on cyclic convolutions for an arbitrary size of transform;
- a method for computation of the primitive substitution in the form of a hashing array or simplified hashing array supplemented by an array of signs that provides an opportunity of the enhancement the efficient of fast computation the sequence of permutation;
- the method of constructing a generalized structure of the basic matrix of the DHT in which, unlike the known ones, the hashing array is used for the table form of a

structure with the simplified value of the argument of the basic function with a sign for the first elements of the cyclic submatrices;

- the method of the integer search of identical submatrices in the block-cyclic structure of the transformation basis by means of the table coordinates, which reduces the computational costs of the analysis of the block-cyclic structure of the basis of DHT;

improved:

- the method of constructing the block-cyclic structure of the transformation basis of DHT for sizes equal to integer power of a prime number on the basis of the regular growth of horizontal lines in the structure of the basis with an increase of the size of transform, which ensures the possibility of determining the number of identical submatrices depending on the values of a prime number of size and its degree;

- the method of analyzing identical submatrices in the block-cyclic structure of the transformation basis of DHT for composite sizes, which is to simplify the search for coordinates of identical sub-matrices containing elements of a multiple for size of transform, which speeds up the definition of a set of identical sub-matrices;

- the system of interconnection of the stages of computation of hashing arrays, the reduction of the number of harmonic coefficients, the number and volume of cyclic convolution, which provides the possibility of flexible adaptation of the implementation of the DHT to the corresponding software and hardware computing resources;

received further development:

- the schematic model of the serial-parallel interconnection of the main subtasks of synthesis of the algorithm and its implementation, which enables to effectively organize the computation of real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions;

- the method for the development of structural schemes using blocks of execution of cyclic convolutions, which enables an opportunity of the enhancement the efficient the area-delay index in the chip of the computation of real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions.

The first chapter contains the overview and analysis of existing methods for computation of discrete harmonic transforms based on the fast cyclic convolutions. However, most methods for computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions are used only for a prime and the power of prime sizes of transform (Rader, Vinograd algorithms) or have the quadratic computational complexity (Goertzel, Bluestein algorithms). The standardized ISO/IEC of the discrete cosine and sine transforms are not yet sufficiently explored in terms of efficient computation. Therefore, the development of a generalized methodology for the synthesis of fast algorithms based on cyclic convolutions and the construction of efficient discrete harmonic transforms computation means is relevant.

The second chapter contains the analysis and substantiation of the methodological principles and stages for the synthesis and computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions. The methodology of the formation and analysis of the structure of discrete harmonic constituents of the basis of transform in the form of a set of cyclic submatrices is generalized, which enables to synthesize effective algorithms of cosine, sine, Hartley transform and their types regardless of the value of the size of transform.

For the synthesis of efficient algorithms a hashing array is used which is determined by the cyclic decomposition of the substitution of rows/columns of arguments of the basis functions of the transform. The method of an integer search of the identical cyclic submatrices in the structure of the basis matrix of transform is developed, which uses the hashing arrays.

As a result of the development of a generalized methodology, a systematic set of principles, methods, algorithms, structures for synthesis of effective algorithms for computation of the real discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions has been obtained.

The third, fourth and fifth chapters contain the analysis of the peculiarities of synthesis algorithms for efficient computation of each of the four types of discrete cosine, sine, Hartley transforms based on cyclic convolutions according to the methodology of forming cyclic structures in the matrix of arguments of the basis

functions of discrete harmonic transforms. We show compliance with the principles of the generalized methodology by the specific examples forming the cyclic blocks in the basis structure for four main types of transforms of each of discrete harmonic transforms. The consolidated tables of peculiarities of the synthesis of algorithms and the results of the specific examples of structural schemes of modules for computation of discrete harmonic transforms have been obtained.

The sixth chapter contains the analysis of computational complexity and means of efficient computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions. The computational complexity depends on the type of discrete harmonic transforms, the size N of the transform, the number and volume of cyclic convolutions, that is, on the structure of the transform kernel. For discrete harmonic transforms of sizes equal to integer powers of a prime number, characterized by the same horizontal type of building-up the block-cyclic submatrices, the stage of analysis of identical submatrices is eliminated, which accelerates the process of synthesis of the algorithm. The computation of cyclic convolutions for the sequences of harmonic coefficients with the repetition of a group of elements found in the proposed algorithms reduces the amount of cycle convolutions and, accordingly, the computational complexity of the real discrete harmonic transform.

The method of development of the structural schemes of direct and reverse computation of discrete harmonic transforms, containing systolic convolvers for performing cyclic convolutions, has been developed. At the system stage of the design of integral circuits for the implementation of discrete harmonic transforms, which is a strategic stage, the construction of structural schemes allows you a choice, based on the parameters of the hashing arrays, the corresponding specific structure of the computing module and the volume of cyclic convolutions. The combination with the advanced decisions of the following design stages improves the technical characteristics of the developed integrated circuits of modules for computation of discrete harmonic transforms.

Practical value of the obtained results. On the basis of the generalized methodology, a software for the fast computation of an arbitrary size of discrete

harmonic transforms based on cyclic convolutions has been developed. The results of the software realization of synthesis of algorithms and computation of DCT-II on the basis of fast cyclic convolutions are presented. The comparison of the computation of the developed software with the program of the library FFTW3 on the universal computer system shows that the execution time of the developed test program is shorter for short volumes of transform. Therefore, it is relevant to apply a generalized methodology for efficient computation of discrete harmonic transforms based on cyclic convolutions for constructing computation of larger sizes of transform using the smaller sizes. The implementation of the DHT based on cyclic convolutions, based on the developed structural diagrams of the DHT computation module, is effectively implemented in integrated circuits, providing a reduction in the employment area of the crystal due to the localization and regularity of the connections between the processor elements in the blocks of cyclic convolutions.

Key words: real basis, synthesis of algorithms, cyclic convolution, hashing array, discrete harmonic transforms, discrete cosine (DCT) transform, discrete sine (DST) transform, discrete Hartley transform (DHT).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації :

- [1] I. Prots'ko, "Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions", *Int. J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 7, iss. 1, pp. 1-9, 2013. (Indexes: Compendex, Scopus, IET Inspec, etc.)
- [2] I. Prots'ko, "Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions", *IET Signal Process.*, vol. 8, iss. 4, pp.301-308, 2014. (Indexes: Scopus, IET Inspec, SCI, Ei Compendex).
- [3] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Algorithm of efficient computation DST^{I-IV} using cyclic convolutions", *WSEAS Trans. Signal Process.*, vol. 10, pp. 278-288, 2014. (Indexes: Compendex, Elsevier, Scopus, IET Inspec, etc.)
- [4] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "The Runtime Benchmarking of DCT-II based on Cyclic Convolutions", *Int. J. Condition Monitoring and Diagnostic Engineering*

- Management*, vol. 21, no. 2, pp. 11-16, 2018. (Indexes: Scopus, Inspec, Acoustics Abstracts, Engineering Index Monthly, International Aerospace Abstracts, etc.)
- [5] I. Prots'ko, "The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions", *Int. J. Signal Proces. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-127, 2014. (Indexes: IET Inspec, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, etc.)
- [6] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions", *American J.Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 1, no.3, pp. 114-119, 2015. (Indexes: Worldcat, ResearchBib, Academickeys)
- [7] I. Prots'ko, "Synthesis of Efficient Algorithms of DST for Types I, IV via Cyclic Convolutions", *Int. J. Electronic Engineering and Computer Science*, vol. 1, no.1, pp. 6-13, 2016.
- [8] I. Prots'ko, and V. Teslyuk, "Development of WFTA based on the hashing array", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2(45), с.135-142, 2018. (Indexes: Web of Science, Index Copernicus, INSPEC, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat)
- [9] І. Процько, "Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 626, с. 74-78, 2008.
- [10] І. Процько, "Взаємозв'язок ефективних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів 2^n ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 685, с. 125-130, 2010.
- [11] І. Процько, та Р. Рикмас, "Аналіз циклічних підматриць в структурі базису дискретних гармонічних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №710, с. 209-214, 2011.
- [12] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних", *Вісник національного*

- університету "Львівська політехніка": *Автоматика, вимірювання та керування*, № 530, с. 175-180, 2005.
- [13] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Секціонування базової матриці дискретного гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 564, с. 40-45, 2006.
- [14] І. Процько, "Обчислювальні структури адаптивного до обсягу ШПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 651, с. 145-151, 2009.
- [15] І. Процько, "Особливості обчислення циклічних згорток для ідентичних послідовностей", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 719, с.200-206, 2011.
- [16] І. Процько, "Аналіз алгебраїчної системи аргументів для простого обсягу ДПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с. 48-53, 2011.
- [17] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДКП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 732, с.274-280, 2012.
- [18] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДКП на основі циклічних згорток", *Моделювання та інформаційні технології*" збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, Вип. 65, с. 110-118, 2012.
- [19] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 591, с. 58-63, 2007.

- [20] І. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДСП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 743, с. 140-151, 2012.
- [21] І. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДСП на основі циклічних згорток", *Збірн. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с. 196-205, 2012.
- [22] І. Процько, "Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 522, с. 85-89, 2004.
- [23] І. Процько, "Ефективне обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи та мережі*, № 688, с. 190-196, 2010.
- [24] І. Процько, "Синтез та обчислення основних типів ДПХ на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 744, с.302-311, 2012.
- [25] І. Процько, "Схема алгоритму синтезу гармонічних дискретних перетворень в підсистемі аналізу САПР", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №694, с. 297-302, 2011.
- [26] О. Грищук, та І. Процько, "Обчислення значень канонічного розкладу одновимірної величини", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 501, с. 30-32, 2004.
- [27] І. Процько, "Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 549, с.157-164, 2005.

- [28] І. Процько, "Узагальнене ефективне дискретне гармонічне перетворення даних", *Технічні вісті. Львів*, № 1(22), 2(23), с. 88-92, 2006.
- [29] І. Процько, "Розпаралелення на рівні підзадач алгоритму ШГП на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 826, с.306-312, 2015.

Наукові праці апробаційного характеру:

- [30] І. Процько, та В. Радомський, "Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток" на V *Всеукр. міжн. конф. УкрОБРАЗ'2000*, Київ, 2000, с. 249-252.
- [31] І. Процько, та В. Радомський, "Обчислення швидкого трансформування Фур'є за допомогою згорток", на II *Національній наук.-практ. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології": Збірка тез доповідей*, Київ: НТУУ "КПІ", 2000, с. 97-98.
- [32] I. Protsko, "Adaptive synthesis to transform size of Fast Fourier Algorithm", in *Proc. VIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2003)*, Lviv-Slavske, 18-22 february 2003. pp. 230-231.
- [33] I. Prots'ko, "Computational parallel models of the discrete harmonic transforms", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2005)*, Lviv-Polyana, 23-26 february, 2005, pp. 230-231.
- [34] R. Nykyforchin, and I. Prots'ko, "Computational algorithm of the discrete harmonic components for microelectronic systems", in *Proc. Ist Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2005)*, Lviv-Polyana, 25-28 may, 2005, pp. 21-22.
- [35] I. Protsko, "Fast Cosine Transform Algorithm on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. 2nd Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2006)*, Lviv-Polyana, 24-27 may, 2006, pp. 65-66.

- [36] I. Protsko, "The Efficient Algorithm of Discrete Cosine Transform", in *Proc. IXth Int.l Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2007)*, Polyana, 20-24 february, 2007, pp. 163-164.
- [37] І. Процько, "Обчислювальні паралельні моделі гармонічних дискретних перетворень", на наук.-прак. конф. *Математичне моделювання складних систем*, Львів, 2007, с. 214-219.
- [38] I. Prots'ko, "The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms", in *Proc. IVth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2008)*, Polyana, 21-24 may, 2008, pp. 101-102.
- [39] I. Prots'ko, "Computational structure of adaptive to transform size FFT", in *Proc. Xth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009)*, Polyana, 24-28 february, 2009, pp. 255-257.
- [40] I. Prots'ko, "The compare of computation FFT on base cyclic convolutions for size of $N=2^n$ ", in *Proc. Vth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2009)*, Polyana, 22-24 april, 2009, pp. 70-72.
- [41] I. Prots'ko, " Interconnection discrete harmonic transforms sizes 2^n on base circular convolutions", in *Proc. VIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2010)*, Polyana, 20-23 april, 2010, pp.49-50.
- [42] I. Prots'ko, "The Efficient Computation of Discrete Hartley Transform on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. Vth Int. Scientific and Technical Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT 2010)*, Lviv, 14-16 october, 2010, pp.157-158.
- [43] I. Prots'ko, "The Efficient Computation DHT using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2011)*, Polyana, 24-28 february, 2011, pp. 85-86.
- [44] I. Prots'ko, and R. Rikmas, "Analysis cyclic submatrices in structure of basis discrete harmonic transform", in *Proc. VIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2011)*, Polyana, 12-14 may, 2011, pp. 64-66.

- [45] I. Prots'ko, "The specific of computation cyclic convolutions for identical sequences", in *Proc. VIth Int.Scienc. and Tech. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2011)*, Lviv, 16-19 november, 2011, pp. 301-302.
- [46] I. Prots'ko, "Analysis algebraic system of arguments for prime size DHT", in *Proc. XIth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012)*, Lviv-Slavske, 24-28 february, 2012, pp. 428.
- [47] I. Prots'ko, "Generalized approach for synthesis and computation DST using cyclic convolutions", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2012)*, Polyana, 18-21 april, 2012, pp.66-67.
- [48] I. Prots'ko, and R. Rikmas "Analysys parallel processing DHT using convolution on SIMT model", in *Proc. VIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2012)*, Lviv, 20-24 november, 2012, pp.136-137.
- [49] I. Prots'ko, "The Module of DCT^{II} for Size N=8 using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2013)*, Polyana, february 2013, pp. 299-301.
- [50] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The program implementation of the synthesis the efficient algorithms for computation of DCT-II via cyclic convolutions", in *Proc. IXth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2014)*, Lviv, 18-22 november, 2014, pp. 116-118.
- [51] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [52] I. Prots'ko, R. Rikmas, and M. Mashevskya "Performance evaluation of the program of DCT-II using cyclic convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2017)*, Lviv, 5-8 september 2017, pp.116-118.

- [53] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The efficient computation of integer DCT based on cyclic convolutions", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Computer Sciences & Information Technologies (CSIT'2018)*, Lviv, 11-14 september 2018, pp.245-248.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації :

- [54] І. О. Процько, "Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток", *G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01), Патент 96540 Україна*, 10.11.2011, Бюл. № 21.
- [55] І. О. Процько, та В. А. Радомський, "Пристрій для обчислення швидкого трансформування Фур'є", *G06F7/00, G06F15/00, Декл. патент 346144 Україна*, 15.03.2001, Бюл. № 2.
- [56] І. О. Процько, та В. М. Теслюк, "Пристрій канонічного розкладу числа на множники", *G06F7/04(2006.01), G06F17/10(2006.01), Патент 116912 Україна*, 25.05.2018, Бюл. № 10.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	25
ВСТУП	26
РОЗДІЛ 1 Аналіз обчислень дискретних гармонічних перетворень (ДГП) на основі циклічних згорток.....	36
1.1 Інтенсивний розвиток обчислювальних алгоритмів для швидких перетворень класу Фур'є.....	36
1.2 Становлення обчислення швидкого перетворення Фур'є на основі циклічних згорток.....	40
1.2.1 Алгоритми Рейдера, Герцеля, Блюстейна.....	40
1.2.2 Алгоритм Вінограда перетворення Фур'є.....	42
1.3 Становлення обчислення швидкої циклічної згортки.....	45
1.3.1 Теорема про швидку згортку.....	45
1.3.2 Інтерполяційний алгоритм обчислення згортки Тоома - Кука.....	47
1.3.3 Алгоритм Агарвала - Кулі.....	47
1.3.4 Обчислення згортки на основі поліноміальних перетворень.....	49
1.3.5 Обчислення згортки на основі теоретико-числових перетворень.....	51
1.3.6 Аналіз інших ефективних обчислень циклічної згортки.....	52
1.4 Аналіз обчислень дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток.....	55
Висновки до першого розділу	61
РОЗДІЛ 2 Методологія приведення обчислення дискретних гармонічних перетворень до циклічних згорток.....	64
2.1 Дійсні дискретні гармонічні перетворення та їхні основні властивості...	64
2.2 Аналіз дійсної базисної матриці ДГП як алгебраїчної структури.....	70
2.2.1 Аналіз сформованих алгебраїчних структур для простого обсягу перетворення.....	71
2.2.2 Аналіз сформованих алгебраїчних структур для складеного обсягу	

	21
перетворення.....	82
2.3 Узагальнений синтез алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток.....	92
2.3.1 Формування твірних масивів за матрицями аргументів базису дискретних гармонічних перетворень.....	92
2.3.2 Аналіз структур базисної матриці для синтезу алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень.....	96
2.3.3 Узагальнена методологія синтезу алгоритмів дискретних гармонічних перетворень та їх обчислення на основі циклічних згорток...	101
Висновки до другого розділу	109
РОЗДІЛ 3 Синтез алгоритму обчислення чотирьох видів дискретного косинусного перетворення (ДКП I-IV) на основі циклічних згорток.....	112
3.1 Основні види дискретного косинусного перетворення ДКП I-IV.....	112
3.2 Синтез алгоритму обчислення ДКП-I на основі циклічних згорток.....	116
3.2.1 Аналіз базисної матриці ДКП-I першого виду.....	116
3.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДКП-I на основі циклічних згорток.....	120
3.2.3 Приклад обчислення ДКП-I обсягу $N=15$ на основі циклічних згорток.....	125
3.3 Синтез алгоритму обчислення ДКП-II та ДКП-III на основі циклічних згорток.....	131
3.3.1 Аналіз базисної матриці ДКП-II та ДКП-III видів.....	131
3.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДКП-II, ДКП-III на основі циклічних згорток.....	137
3.3.3 Приклади обчислення ДКП-II та ДКП-III обсягу $N=7$ та $N=2^n$ на основі циклічних згорток.....	143
3.4 Синтез алгоритму обчислення ДКП-IV на основі циклічних згорток.....	161
3.4.1 Аналіз базисної матриці ДКП-IV.....	161
3.4.2 Особливості синтезу обчислення ДКП-IV на основі циклічних	

згорток.....	164
3.4.3 Приклад обчислення ДКП-IV обсягу $N=10$ на основі циклічних згорток.....	167
Висновки до третього розділу	173
РОЗДІЛ 4 Синтез алгоритму обчислення чотирьох видів дискретного синусного перетворення (ДСП I-IV) на основі циклічних згорток.....	175
4.1 Основні види дискретного синусного перетворення ДСП I-IV.....	175
4.2 Синтез алгоритму обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток.....	176
4.2.1 Аналіз базисної матриці ДСП-I першого.....	176
4.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-I на основі циклічних згорток.....	178
4.2.3 Приклад обчислення ДСП-I обсягу $N=8$ на основі циклічних згорток.....	182
4.3 Синтез алгоритму обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток.....	185
4.3.1 Аналіз базисної матриці ДСП-II та ДСП-III видів.....	185
4.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-II і ДСП-II на основі циклічних згорток.....	189
4.3.3 Порівняння особливостей синтезу алгоритмів обчислення ДСП-II та ДСП-III на основі циклічних згорток.....	199
4.4 Синтез алгоритму обчислення ДСП-IV на основі циклічних згорток.....	200
4.4.1 Аналіз базисної матриці ДСП-IV виду.....	200
4.4.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV на основі циклічних згорток.....	202
4.4.3. Приклад обчислення ДСП-IV обсягу $N=5$ на основі циклічних згорток.....	205
Висновки до четвертого розділу	208
РОЗДІЛ 5 Синтез алгоритму обчислення загального дискретного перетворення Хартлі (ДПХ I-IV) на основі циклічних згорток.....	210

5.1 Види та властивості загального дискретного перетворення Хартлі.....	210
5.2 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток.....	213
5.2.1 Аналіз базисної матриці ДПХ-I першого виду.....	213
5.2.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-I на основі циклічних згорток.....	222
5.3 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-II на основі циклічних згорток.....	228
5.3.1 Аналіз базисної матриці ДПХ-II виду.....	228
5.3.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-II на основі циклічних згорток.....	231
5.4. Синтез алгоритму обчислення ДПХ-III на основі циклічних згорток.....	239
5.4.1. Аналіз базисної матриці ДПХ-III виду.....	239
5.4.2. Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-III на основі циклічних згорток.....	241
5.5 Синтез алгоритму обчислення ДПХ-IV на основі циклічних згорток.....	248
5.5.1 Аналіз базисної матриці ДПХ-IV виду.....	248
5.5.2 Особливості синтезу алгоритму обчислення ДПХ-IV на основі циклічних згорток.....	250
Висновки до п'ятого розділу	259
 РОЗДІЛ 6 Аналіз ефективності узагальненої методології синтезу алгоритмів та обчислення ДГП на основі циклічних згорток.....	261
6.1 Апаратна кросплатформність виконання ДГП на основі циклічних згорток.....	262
6.1.1 Структура та етапи взаємодії базових блоків пристроїв обчислення ДГП на основі циклічних згорток.....	262
6.1.2 Спеціалізовані обчислювальні структури виконання ДГП на основі циклічних згорток.....	268
6.2 Гнучкість узагальненої методології синтезу алгоритмів ДГП та їх обчислень на основі циклічних згорток	274
6.2.1 Ефективне обчислення твірних масивів для синтезу алгоритмів	

	24
ДГП на основі циклічних згорток.....	274
6.2.2 Аналіз блочно-циклічних структур базису ДГП на основі твірною масиву.....	280
6.3 Аналіз обчислювальних затрат ДГП на основі циклічних згорток.....	291
6.3.1 Оцінювання обчислювальних затрат ДГП на основі циклічних згорток.....	291
6.3.2 Аналіз програмної реалізації обчислення ДГП на основі циклічних згорток.....	296
6.4 Інформація про використання узагальненої методології та впровадження результатів дисертаційної роботи.....	306
Висновки до шостого розділу	311
ВИСНОВКИ	313
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	316
ДОДАТКИ	342
Додаток А. Твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДКП-II коротких обсягів перетворення.....	343
Додаток Б. Варіанти твірних масивів для синтезу алгоритму обчислення ДСП-II коротких обсягів перетворення.....	345
Додаток В. Твірні масиви для синтезу алгоритму обчислення ДСП-IV коротких обсягів перетворення.....	347
Додаток Г. Результати програмної реалізації етапів синтезу та обчислення ДКП-II для обсягу N=20.....	349
Додаток Д. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи	362
Додаток Е. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	367

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АВПФ	– алгоритм Вінограда перетворення Фур'є
ГПД	– граф потоку даних
ДГП	– дискретні гармонічні перетворення
ДКП	– дискретне косинусне перетворення
ДПХ	– дискретне перетворення Хартлі
ДПФ	– загальне дискретне перетворення Фур'є
ДСП	– дискретне синусне перетворення
ДТП	– дискретні тригонометричні перетворення
ЗДКП	– зворотне дискретне косинусне перетворення
ЗШПФ	– зворотне швидке перетворення Фур'є
ЗДСП	– зворотне дискретне синусне перетворення
КТЗ	– китайська теорема про залишки
НВІС	– надвеликі інтегральні схеми
НСД	– найбільший спільний дільник
ПЕ	– процесорний елемент
ТЧП	– теоретико-числові перетворення
ЦЗ	– циклічна згортка
ШГП	– швидкі гармонічні перетворення
ШПФ	– швидке перетворення Фур'є
ШПХ	– швидке перетворення Хартлі
НА	– на піввибірки асиметрично
НС	– на піввибірки симетрично
WA	– на вибірку асиметрично
WS	– на вибірку симетрично

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Застосування ефективних методів для розв’язування завдань з опрацювання інформації почалося ще до ери поширення обчислювальних засобів. Каталізатором інтенсивного дослідження та розвитку швидких обчислень стало використання дискретних перетворень класу Фур’є та цифрових згорток у різноманітних прикладних галузях на базі комп’ютерних систем.

На сучасному етапі розроблено ряд методів та засобів швидкого обчислення дискретних перетворень класу Фур’є та згорток. Всебічно досліджено подання базисної матриці дискретного перетворення через добуток слабозаповнених матриць (факторизацію), що суттєво зменшило кількість обчислювальних операцій під час виконання дискретних перетворень. Встановлено, що обчислення швидких перетворень є спеціальними випадками в алгебрах над полями або кільцями. Метод з використанням поліноміальних перетворень для одержання швидких алгоритмів привів до значних теоретичних і практичних результатів. Варте уваги використання теоретико-числових перетворень, що має свої особливі обчислювальні переваги. Таким чином, є характерним застосування різних теоретичних обґрунтувань для створення обчислювальних методів й алгоритмів дискретних перетворень, що враховують технічні та технологічні особливості розроблення ефективних засобів комп’ютерної реалізації.

Розвиток обчислювальних методів пов’язаний із зростанням складності прикладних завдань і, відповідно, вимог до мультифункціональності, швидкодії та економічності апаратно-програмних засобів їх реалізації. У зв’язку з цим почали досліджуватись ортогональні гармонічні базисні системи для обчислення прямого і зворотного дискретного перетворення тільки в дійсній області. Значне місце в опрацюванні дійсних даних зайняли ДКП, ДСП та ДПХ та їхні види, які називатимемо дискретними гармонічними перетвореннями.

Поряд із дослідженнями ефективних методів виконання дискретних перетворень розвивались і взаємодоповнювались методи швидкого обчислення цифрової згортки, яка має широке застосування. Дискретні перетворення і згортка – два різні, але тісно взаємопов'язані розділи цифрового опрацювання інформації. Адже ефективне обчислення згортки реалізовується на основі теореми про швидку згортку, що базується на використанні швидких перетворень класу Фур'є. У цьому аспекті парадоксальним виглядає метод, в якому використано для ефективного обчислення ДГП циклічну згортку.

Розвиток підходу обчислення ДПФ на основі ЦЗ розпочався в кінці 60-х років XX століття. Значний внесок у теорію і практику ефективного обчислення ДГП у цьому напрямі внесли Ч. Рейдер, Л. Блюстейн, Дж. Кулі, Г. Нуссбаумер, Р. Блейхут, Ш. Віноград, В.-Ч. Сіу та ін. Цей підхід продовжують інтенсивно досліджувати та розвивати, адже він забезпечує виконання мінімальної кількості множень у випадку використання циклічних згорток із мінімальною мультиплікативною складністю. Схеми обчислення ДГП на основі ЦЗ зменшують площу зайнятості кристала НВІС, забезпечуючи високі технічні параметри. Відомі наукові роботи з швидких перетворень класу Фур'є вітчизняних науковців В. К. Задіраки, Л. А. Гнатіва, О. Б. Коханова, В. А. Лужецького, А. М. Терещенка, М. М. Яцимірського та ін.

Отже, створене науково-інформаційне підґрунтя ставить актуальне завдання подальшого розвитку ефективного обчислення ДГП на основі ЦЗ щодо розроблення узагальненої методології, яка забезпечить створення ефективних програмних та апаратних засобів комп'ютерної реалізації обчислення дискретних перетворень класу Фур'є.

Науково-прикладною проблемою, розв'язанню якої присвячена дисертаційна робота, є підвищення ефективності обчислювальних характеристик (кількість арифметичних операцій, кількість циклічних згорток, тривалість виконання) дійсних дискретних гармонічних перетворень шляхом розроблення узагальненої методології, що вирішує завдання формування й аналізу структури дискретних гармонічних складових базису перетворення у

вигляді набору ганкелевих циркулянтів і виконання обчислення перетворень на основі циклічних згорток.

Розроблена в дисертаційній роботі узагальнена методологія у виді систематизованої сукупності апробованих принципів, методів, способів, алгоритмів, схем, термінів для виконання обчислення ДГП на основі ЦЗ є важливим компонентом для вирішення багатьох прикладних завдань.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Національному університеті “Львівська політехніка”.

Дослідження проводили в рамках науково-дослідних робіт:

ДБ/МЕМС «Високошвидкісні інформаційні технології опрацювання даних у мікроелектромеханічних системах на основі вбудованих штучних нейронних мереж» (№ ДР 0111U001218) (2011-12р.), особистий внесок здобувача – розроблення узагальненої методології обчислення ДГП з використанням ЦЗ на основі аналізу базисів основних видів дискретного косинусного, синусного та перетворення Хартлі;

ДБ/СЕБ «Розроблення базових компонентів для синтезу інтелектуальних мобільних робототехнічних систем» (№ ДР 0113U003191) (2013-14р.), особистий внесок здобувача – розроблення узагальнених методологічних принципів та етапів синтезу алгоритмів дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ;

ДБ/Енергоефективність «Інтелектуальні інформаційні технології багаторівневого управління енергоефективністю регіону» (№ ДР 0117U004450) (2017-18р.), особистий внесок здобувача – розроблення і реалізація, відповідно узагальненої методології, обчислювальних алгоритмів ДКП-II на основі ЦЗ довільного обсягу.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є створення узагальненої методології синтезу та виконання алгоритмів ДГП на основі циклічних згорток з покращеними обчислювальними характеристиками у комп'ютерних системах.

Поставлена мета визначає такі основні завдання:

- аналіз та дослідження методів ефективного обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ, що дасть змогу виділити їхні переваги і недоліки;
- обґрунтування узагальнених методологічних принципів синтезу алгоритмів обчислення дійсних дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ;
- розроблення методу визначення твірного масиву, що стисло описує блочно-циклічну структуру базису перетворення ДГП;
- визначення, відповідно узагальненої методології, взаємозв'язаної послідовності етапів синтезу алгоритмів обчислення ДГП на основі ЦЗ;
- розроблення методу цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення для скорочення обчислень ДГП на основі ЦЗ;
- аналіз особливостей кожного з чотирьох видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі для виконання їх обчислення через ЦЗ відповідно узагальненої методології;
- розроблення програмних засобів обчислення ДГП на основі ЦЗ для підтвердження вірогідності визначених методологічних принципів та етапів синтезу алгоритму з покращеними обчислювальними характеристиками.

Об'єкт дослідження – процес синтезу алгоритмів і розроблення структурних схем на основі циклічних згорток для створення нових програмних чи апаратних засобів обчислення основних видів дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі.

Предмет дослідження – принципи, методи і засоби обчислення основних видів дискретних косинусних, синусних і перетворень Хартлі на основі циклічних згорток.

Методи дослідження. Для вирішення задач розроблення узагальненої методології для синтезу ефективних алгоритмів використовувались методи й основні положення цифрової обробки сигналів (для аналізу особливостей базисів перетворення ДГП), теорії матриць (для подання базисів перетворень

ДГП у вигляді блочно-циклічних матричних структур), комбінаторного аналізу (для визначення циклічного розкладу підстановки), алгебри та теорії груп (для обґрунтування узагальненої методології). Для аналізу та опрацювання результатів використано високорівневу мову програмування C++, систему комп'ютерної математики MATLAB, методи експериментальних досліджень та статистичної обробки результатів.

Наукова новизна отриманих результатів.

Вперше:

- розроблено узагальнену методологію на основі циклічного розкладу підстановки, яка дозволила якісно підвищити ефективність виконання обчислення ДГП через циклічні згортки завдяки можливості вибору довільного обсягу перетворення;

- розроблено метод обчислення примітивної підстановки у вигляді твірного масиву або спрощеного твірного масиву, доповненого масивом знаків, який, на відміну від існуючих, підвищує ефективність швидшого визначення послідовності переставлення;

- розроблено метод побудови узагальненої блочно-циклічної структури базисної матриці ДГП, у якому, на відміну від відомих, використано твірний масив для табличного формування структури з використанням спрощених значень аргументів базисної функції зі знаком для перших елементів циклічних підматриць;

- розроблено метод цілочисельного пошуку ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення через використання табличних координат, завдяки якому зменшуються обчислювальні затрати і підвищується ефективність аналізу блочно-циклічної структури базису перетворення ДГП;

вдосконалено:

- метод побудови блочно-циклічної структури базису перетворення для ДГП обсягів рівних цілому степеню простого числа на основі закономірного нарощення горизонтальних лінійок в структурі базису зі збільшенням обсягу

перетворення, який забезпечує можливість визначення кількості ідентичних підматриць залежно від значень простого числа обсягу і його степеня;

- метод аналізу ідентичних підматриць у блочно-циклічній структурі базису перетворення ДГП для складених значень обсягів, який полягає у спрощенні пошуку за координатами ідентичних підматриць, що містять елементи, кратні обсягу перетворення, завдяки чому підвищується ефективність тривалості визначення наборів ідентичних підматриць;

- систему взаємозв'язку етапів обчислення твірних масивів, скороченої кількості гармонічних коефіцієнтів, кількості та обсягу циклічних згорток, що забезпечує можливість гнучкої адаптації виконання ДГП до відповідних програмних та апаратних обчислювальних ресурсів;

отримали подальший розвиток:

- схемна модель взаємозв'язку обчислювальних підзадач, яка дає змогу проводити послідовно-паралельну організацію обчислень дійсних ДГП на основі циклічних згорток;

- метод розроблення обчислювальних структурних схем з використанням блоків виконання циклічних згорток, який забезпечує можливість підвищити ефективність у вигляді показника площа-затримка в мікросхемах обчислення ДГП на основі циклічних згорток.

Практичне значення отриманих результатів. Завдяки застосуванню розробленої узагальненої методології, яка визначає взаємозв'язані обчислювальні підзадачі процесу синтезу алгоритму та його виконання для обчислення дійсних дискретних косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі ЦЗ, отримано узагальнені практичні результати, які полягають у:

- зменшенні тривалості визначення послідовності переставлення за твірним масивом $P(n)$ більш ніж втричі в порівнянні з визначенням за цілочисельним степенем примітивного елемента циклічної групи, а для складеного обсягу перетворення $N=N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$ визначення послідовності переставлення виконується до $3k$ -раз швидше у випадку розпаралелення обчислення незалежних k - частин твірних підмасивів;

- мультифункціональності, що зменшує затрати більш ніж вдвічі апаратної або програмної реалізації виконання різних ДПХ-II/ДКП-II/ДСП-II перетворень для конкретного обсягу в одному модулі обчислення;

- зменшенні кількості множень на 30% при використанні циклічних згорток з мінімальною мультиплікативною складністю для коротких обсягів, що дорівнюють $N=2^n$ для а) варіанта твірною масиву порівняно з традиційними обчисленнями ДКП-II;

- зменшенні використання площі зайнятості кристала НВІС на більше ніж 10% завдяки локальності та регулярності зв'язків між процесорними елементами у блоках ЦЗ;

- зменшенні в межах (1,2÷3) разів тривалості обчислення ДКП-II для коротких обсягів, менших за $N=120$ розробленого програмного забезпечення порівняно з обчисленням програми бібліотеки FFTW3(Fastest Fourier Transform in the West) розробника MIT (Massachusetts Institute of Technology).

Завдяки покращеним обчислювальним характеристикам розроблені алгоритми та структурні схеми обчислення дійсних дискретних перетворень класу Фур'є на основі ЦЗ можуть застосовуватись для опрацювання інформаційних даних різноманітних фізичних явищ і процесів. Практичне значення одержаних результатів дослідження підтверджено актами впровадження в ТОВ “Юнісервіс” (м. Львів), ТОВ “Лемберг рішення” (м. Львів), ТДВ “Самбірська швейна фабрика” (м. Самбір, Львівська область).

ТОВ “Юнісервіс”, розробник ліцензійного програмного забезпечення систем автоматизованого проектування трубопровідних мереж, для аналізу та діагностики надійності роботи механічних систем трубопроводу використовує спектральні методи. В процесі моделювання роботи спроектованої мережі, що може витримувати опускання ґрунту, його вібрації, високий тиск рідин з великою питомою вагою, діагностується надійність системи завдяки виявленню підвищених амплітуд вібрацій на частотах, що збігаються з частотами можливих пошкоджень механічних елементів, на резонансних частотах деталей, на частотах протікання робочого процесу. В акті надано позитивні відгуки про

можливості підвищення швидкості роботи та розширення функціональності існуючої підсистеми спектрального аналізу завдяки використанню розробленої узагальненої методології.

ТОВ “Лемберг рішення”, розробник мобільних додатків на ОС Android, застосовує результати дисертаційної роботи для захисту мовної інформації. Використання ДГП на основі циклічних згорток забезпечує на вищому рівні захищеність мовної інформації до криптоаналізу в процесі атаки. Це ґрунтується на використанні багатоступінчастого ключа криптосистеми, до якого входять різні типи перетворень ДКП/ДСП/ДПХ, різні значення обсягів N мовних фрагментів в поєднанні зі способом скремблювання. Низька обчислювальна складність алгоритмів ДГП на основі ЦЗ зменшує часову затримку мовного зв'язку, спричинену процесом скремблювання.

ТДВ “Самбірська швейна фабрика” використовує результати дисертаційного дослідження для контролю якості фрагментів тканин на основі ефективного обчислення двовимірних ДКП-II. Послідовне виконання розроблених одновимірних ДКП-II на основі циклічних згорток для довільних обсягів за рядками та стовпцями даних двовимірного текстурного зображення дає змогу контролювати якість фрагментів тканин різних розмірів. Рівномірно періодичне зображення структури тканини без браку в результаті гармонічного перетворення має відповідне більш загальне спектральне зображення. Зміна цієї картини свідчить про наявність у ній дефекту, і завдяки контролю забезпечують високу якість швейних виробів.

Результати дисертаційної роботи, підтверджені актами впровадження, використовують у навчальному процесі та наукових дослідженнях у Національному університеті “Львівська політехніка”, Львівському національному аграрному університеті для вивчення та використання студентами нових ефективних підходів обчислення косинусних, синусних та перетворень Хартлі на основі циклічних згорток.

Публікації. Результати дослідження опубліковано в 56 друкованих наукових працях. Із них за темою дисертації опубліковано 29 наукових робіт у

фахових виданнях з технічних наук [1] - [29], серед яких 7 входять до міжнародних наукометричних баз, 24 роботи в матеріалах та тезах наукових конференцій [30] - [53], серед яких 7 входять до міжнародних наукометричних баз, 3 патенти України [54] - [56].

Детальний список публікацій здобувача за темою дисертації наведено у додатку Е.

Особистий внесок здобувача. Усі положення, що виносяться на захист, автор сформулював та вирішив самостійно. У 21 науковій праці, опублікованих у співавторстві, авторів дисертації належить: у [3], [18], [21], [30], [31], [34], [48], [50] – узагальнена методологія, що включає принципи та етапи синтезу алгоритмів на основі циклічного розкладу підстановки, для виконання обчислень ДКП, ДСП; у [6] – аналіз розвитку підходів обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі ЦЗ; у [11], [44] – метод пошуку ідентичних підматриць у структурі базисної матриці перетворень; у [8], [12] – розроблення та обґрунтування загальних принципів та етапів формування блочно-циклічних структур у ядрі базису перетворення; у [13] – розроблення методики секціонування на циклічні структури базисної матриці дискретних гармонічних перетворень; у [26], [56] – розроблення ефективного алгоритму канонічного розкладу величини обсягу перетворення ; у [51], [55] – розроблення спеціалізованої структури пристрою обчислення дискретного гармонічного перетворення; [4], [52] – розроблення алгоритму обчислення ДКП-II на основі ЦЗ та аналіз результатів виконання; у [53] – застосування узагальненої методології для обчислення цілочисельного ДКП на основі ЦЗ.

Апробація матеріалів дисертації. Основні теоретичні й практичні результати дисертації доповідались та обговорювались на 24 національних і міжнародних конференціях та презентувались у збірках наукових праць: Праці п'ятої всеукраїнської міжнародної конференції УкрОБРАЗ'2000, (Київ, 2000р.); Збірка тез доповідей учасників II Національної науково-практичної конференції "Системний аналіз та інформаційні технології" (Київ, 2000р.); Збірник матеріалів науково-практичної конференції "Математичне моделювання складних систем",

(Львів, 2007р.); Proceedings of the Ist-VIIth International Conferences MEMSTECH 2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012: Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (Lviv-Polyana); Proceeding of the XI International Conference TCSET'2012: Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science, (Lviv-Slavske, 2012p.); Proceedings of the VII-XII International Conferences CADSM 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015: The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (Lviv-Slavske, Polyana); Proceeding of the Vth, VIIth, IXth International Scientific and Technical Conferences CSIT-2010, 2012, 2014, 2017, 2018: Computer Science & Information Technologies (Lviv).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних скорочень, вступу, шістьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи складає 373 сторінки друкарського тексту, з них основного тексту дисертації – 291 сторінка, що включає 44 рисунки, 81 таблицю, список використаних джерел із 272 найменування та займає 25 сторінок, 6 додатків на 31 сторінці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] C. Runge, "Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Functionen in Sinuswellen", *Z. Math. Physik*, vol. 48, pp. 443-456, 1903.
- [2] G. C. Danielson, and C. Lanczos, "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and Their Application to X-Ray Scattering from Liquids", *J. Franklin Institute*, vol. 233, pp. 45-52, 1942.
- [3] J. W. Cooley, and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series", *Math. Comput.*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.
- [4] I. J. Good, "The interaction algorithm and practical Fourier analysis", *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 22, pp. 372-375, 1960.
- [5] L. H. Thomas , "Using of computer to solve problems in phisics", *Applications of digital computers*, pp. 67-83, 1963.
- [6] R. Yavne, "An economical method for calculating the discrete Fourier transform", in *Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conf.*, part 1 (Thompson book co.), Washington, D.C., 1968, vol.33, pp. 115-125.
- [7] S. Winograd, "On computing the discrete Fourier transform", *Math. Comput.*, vol.32, pp. 175-199, 1978.
- [8] W. Yuan, P. Hao, and C. Xu, "Matrix factorization for fast DCT algorithms", in *IEEE. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP -III.)*, Toulouse, France, 2006, pp. 948-951.
- [9] G. Goertzel, "An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series", *Amer. Math. Monthly*, vol. 65, pp. 34-35, 1958.
- [10] H. J. Nussbaumer, and P. Quandalle, "Fast computation of discrete Fourier transforms using polynomial transforms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 27, pp. 169-181, 1979.
- [11] И. Е. Капорин, "Новый алгоритм быстрого преобразования. Фурье", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, т. 20, № 4, с. 1054-1058, 1980.

- [12] P. Duhamel, and H. Hollmann, "'Split radix' FFT algorithm", *Electronics Lett.*, vol.20, no. 1, pp. 14-16, 1984.
- [13] P. Duhamel, *Papers on the Fast Fourier Transform*. New York: IEEE Pres, 1995.
- [14] А. М. Григорян, и М. М. Григорян, "Двумерное дискретное преобразование Фурье в тензорном представлении и новые ортогональные функции", *Автометрия*, № 1, с. 21-27, 1986.
- [15] А. М. Григорян, "Оптимальный алгоритм вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье", *Изв. вузов. Радиоэлектроника*, т. 29, №12, с. 20-25, 1986.
- [16] P. J. Nicholson, "Algebraic theory of finite Fourier transforms", *J. Comput. Syst. Sci.*, vol. 5, pp. 524-527, 1971.
- [17] J. M. Pollard, "The fast Fourier transform in a finite field", *Math. Comput.*, vol.25, no. 114, pp. 365-374, 1971.
- [18] Р. Блейхут, *Теория и практика кодов, контролирующих ошибки*. Москва: Мир, 1986.
- [19] А. А. Залманзон, *Преобразование Фурье, Уолта, Хаара и их применение в управлении и связи и других областях*. Москва: Наука, 1989.
- [20] Дж. Г. Макклеллан, и Рейдер Ч. М., *Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов*. Москва: Радио и связь, 1983.
- [21] J. Martens, "Recursive cyclotomic factorization – a new algorithm for calculating discrete Fourier transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 32, pp. 750-762, 1984.
- [22] O. K. Ersoy, *Fourier - related transforms, fast algorithms and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- [23] G. Bongiovanni, P. Corsini, and G. Frosini, "One-dimensional and two-dimensional generalized discrete Fourier transforms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-24, pp. 97–99, 1976.
- [24] G. D. Bergland, "A fast Fourier transform for real-valued series", *Commun. ACM*, vol. 11, pp. 703-710, 1968.

- [25] C. M. Rader, and N. M. Brenner, "A new principle for fast Fourier transformation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-24, pp.264-266, 1976.
- [26] G. Bruun, "z-transform DFT filters and FFTs", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-26, pp. 56-63, 1978.
- [27] Р. Кумаресан, и П. К. Гупта, "Алгоритм БПФ для простых множителей на основе арифметики действительных чисел", *Труды института инженеров по электронике и радиотехнике*, т. 73, № 7, с. 98-100, 1985.
- [28] И. О. Арро, "Алгоритм быстрого преобразования Фурье вещественного массива", *Изв. АН СССР, Физ. Мат.*, т. 36, № 3, с. 340-343, 1987.
- [29] E. Chu, and A. George, *Inside the FFT black box. Serial and Parallel Fast Fourier Transform, Algorithms*. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
- [30] R. N. Bracewell, "The Discrete Hartley Transform", *J. Optical Society of America*, vol. 73, pp. 1832-1835, 1983.
- [31] R. N. Bracewell, "The Fast Hartley Transform", *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 8, pp.1010-1018, Aug., 1984.
- [32] N. Ahmed, T. Natarajan and K. R. Rao, "Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-23, pp. 90-93, Jan., 1974.
- [33] A. K. Jain, "A sinusoidal family of unitary transforms", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-1, pp. 356-365, 1979.
- [34] V. Britanak, "A unified discrete cosine discrete sine transform for computation", *Signal Process.*, vol. 43, no. 3, pp. 333-339, 1995.
- [35] Z. Wang, "Comments on generalized discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 7, pp. 1711-1712, 1995.
- [36] D. Liu, D. Wang, and Z. Wang , "Interpolation using Hartley transform", *Electronic Lett.*, vol. 28, no. 2, pp. 209-210, 1992.
- [37] Z. Wang, and B. R. Hunt, "The discrete W transform", *Applied Math. and Comput.*, vol. 16, pp. 19-48, 1985.
- [38] A. Mertins, *Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications*. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd, 1999.

- [39] S. Egner, J. Johnson, D. Padua, J. Xiong, and M. Püschel, "Automatic Derivation and Implementation of Signal Processing Algorithms", *ACM SIGSAM Bull. Commun. in Computer Algebra*, vol.35, no.2, pp. 1-19, 2001.
- [40] Р. Блейхут, *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. Москва: Мир, 1989.
- [41] D. Myers, *Digital Signal Processing, Efficient Convolution and Fourier Transform Techniques*. Sydney, Australia: Prentice Hall, 1990.
- [42] R. Tolimieri, M. An, and C. Lu, *Algorithms for Discrete Fourier Transform and Convolution*. New York: Springer-Verlag (s.ed.), 1997.
- [43] C. M. Rader, "Discrete Fourier transform when the number of data samples is prime", *Proc. IEEE*, vol. 56, pp. 1107-1108, 1968.
- [44] L. I. Bluestein, "Linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transforms", *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, vol. AU-18, pp. 451-455, 1970.
- [45] S. Winograd, "On computing the discrete Fourier transforms", *Proc. National Academy of Sciences USA*, vol. 73, no. 4, pp. 1005-1006, Apr. 1976.
- [46] D. P. Kolba, and T. W. Parks, "A Prime Factor FFT Algorithm Using High Speed Convolution", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-25, pp. 281-294, August, 1977.
- [47] H. F. Silverman, "An introduction to programming the Winograd Fourier Transform algorithm (WFTA)", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 25, no. 2, pp. 152-165, 1977.
- [48] Ш. Зохар, "Алгоритм Винограда для дискретного преобразования Фур'е", в *Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений*, Т. С. Хуанг, Пер. с англ., Москва: Радио и связь, 1984, с. 89-155.
- [49] R. Tolimieri, C. Lu, and W. Johnson, "Modified Winograd FFT Algorithm and Its Variants for Transform Size $N = p^n$ and Their Implementations", *Advanced in Applied Math.*, vol. 10, pp. 289-251, 1989.
- [50] P. Lavoie, "A high-speed CMOS implementation of the Winograd Fourier transform algorithm ", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 8, pp. 2121-2126, Aug. 1996.

- [51] I. Prots'ko, and V. Teslyuk, "Development of WFTA based on the hashing array", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 2(45), с.135-142, 2018.
- [52] Ю. И. Гагарин, "Рекурсивное преобразование Фурье через свертки", *Проблемы передачи информации*, т. 25, Вып. 4, с. 93-95, 1989.
- [53] P. K. Meher, "A new convolutional formulation of the DFT and efficient systolic implementation", in *Proc. IEEE Int. Region 10 Conf. (TENCON'05)*, Melbourne, Australia, Nov., 2005, pp. 1462-1466.
- [54] Л. Рабинер, и Б. Гоулд, *Теория и применение цифровой обработки сигналов*. Москва: Мир, 1978.
- [55] В. И. Гадзиковский, *Теоретические основы цифровой обработки сигналов*. Москва: Радио и связь, 2004.
- [56] А. Оппенгейм, и Р. Шафер, *Цифровая обработка сигналов*, Москва: Техносфера, 2006.
- [57] R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*. New York: Oxford University Press, 1986.
- [58] S. A. Cook, "On the minimum computation time of functions", Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, 1966.
- [59] A. L. Toom, "The complexity of a scheme of functional elements simulating the multiplication of integers", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 150, pp. 496-498, 1963.
- [60] А. А. Карацуба, и Ю. П. Офман "Умножение многозначных чисел на автоматах", *Докл. АН СССР*, т. 145, № 2, с. 293-294, 1962.
- [61] R. C. Agarwal, and J. W. Cooley, "New Algorithms for Digital Convolution", *IEEE Tran. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-25, no. 5, pp. 392 – 409, October, 1977.
- [62] H. J. Nussbaumer, "New algorithm for convolution and DFT based on polynomial transforms", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Tulsa, Oklahoma, USA, April 10-12, 1978, pp. 638-641.
- [63] Г. Дж. Нуссбаумер, *Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки*. Москва: Радио и связь, 1985.

- [64] D. Potts, G. Steidl, and M. Tasche, "Fast algorithms for discrete polynomial transforms", *Math. of Comput.*, vol. 67, no. 224, pp. 1577-1590, 1998.
- [65] W.-C. Siu, and A. G. Constantinides, "Cyclic Convolution of Long Sequences using Number Theoretic Transform", *IEE Proc. Electronic Circuits and Syst.*, vol.131, no. 3, pp. 119-126, 1984.
- [66] C. M. Rader, "Discrete convolution via Mersenne transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-21, no. 12, pp. 1269-1273, 1972.
- [67] H. J. Nussbaumer, "Complex convolutions via Fermat number transforms", *IBM J. Research and development*, vol. 20, pp. 282-284, 2010.
- [68] Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, и М. Н. Поляк, *Цифровая обработка сигналов: Справочник*. Москва: Радио и связь, 1985.
- [69] D. A. Pitassi, "Fast convolution using the Walsh transform," in *Proc. Conf. on Applications of Walsh Functions*, Washington D. C., April 1971, pp. 130-133.
- [70] V. F. Daviss, "A class of efficient convolution algorithm", in *Proc. Conf. on Applications of Walsh Functions*, Washington D. C., April 1971, pp. 318-329.
- [71] А. Н. Терещенко, "Оптимизация метода Питасси вычисления свертки", *Искусственный интеллект*, №1, с. 204-212, 2009.
- [72] M. Teixeira, "A New Method Mathematically Links Fast Fourier Transform Algorithms with Fast Cyclic Convolution Algorithms", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 2, no. 5, pp. 92-94, 1995.
- [73] M. Teixeira, and Y. I. Rodríguez, "Parallel Cyclic Convolution Based on Recursive Formulations of Block Pseudocirculant Matrices", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 7, pp. 27-55, 2008.
- [74] A. V. Oppenheim, and R. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [75] M. Borgerding, "Turning Overlap-Save into a Multiband Mixing, Downsampling Filter Bank", *IEEE Signal Process. Magazine*, pp. 158-161, 2006.
- [76] K. R. Rao, and P. Yip, *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*. Boston: Academic Press, 1990.

- [77] V. Britanak, "A unified approach to fast computation of discrete sinusoidal transforms I: DCT and DST transforms", *Computers and Artificial Intelligence*, vol. 17, no. 6, pp. 583-607, 1998.
- [78] N. Roma, and L. Sousa, "A tutorial overview on the properties of the discrete cosine transform for encoded image and video processing", *Signal Process.*, vol.91, no. 01, pp. 2443-2464, 2011.
- [79] W. Yuan, P. Hao, and C. Xu, "Matrix factorization for fast DCT algorithms", in *Proc. IEEE Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, 2006, vol. III, pp. 948-951.
- [80] B. G. Lee, "A new algorithm for computing the discrete cosine transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-32, pp. 1243-1245, Dec., 1984.
- [81] S. Egner, and M. Püschel, "Automatic Generation of Fast Discrete Signal Transforms", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 9, pp. 1992-2002, 2001.
- [82] M. J. Narasimha, and A. M. Peterson, "On the computation of the discrete cosine transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. COM-26, no. 6, pp. 934-936, 1978.
- [83] H. Malvar, "Fast computation of discrete cosine transform through fast Hartley transform", *Electronic Lett.*, vol. 22, no. 7, pp. 352-353, 1986.
- [84] W. Li, "A new algorithm to compute the DCT and its inverse", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, pp.1305-1313, 1991.
- [85] E. Feig, and M. Ben-Or, "On Algebras Related to the Discrete Cosine Transform", *Linear algebra and its applications*, vol. 266, pp. 81-106, 1997.
- [86] M. Vetterli, and H. Nussbaumer, "Simple FFT and DCT Algorithms with Reduced Number of Operations", *Signal Process.*, vol. 6, pp. 267-278, Aug., 1984.
- [87] L. P. Chau, D. P. K. Lun, and W-. C. Siu, "Efficient Prime Factor Algorithm and Address Generation Techniques for the Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Circuits and Syst., Pt.II* , vol. 48, no. 10, pp. 985-988, 2001.
- [88] B. G. Lee, "Input and output index mappings for a prime-factor decomposed computation of discrete cosine transform", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Process.*, vol. 37(2), pp. 237-244, Feb., 1989.

- [89] P. Z. Lee, and F. Y. Huang, "An efficient prime factor algorithm for Discrete Cosine Transform and its hardware implementations", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no 8, pp. 1996-2005, 1994.
- [90] A. Tatsaki, C. Dre, T. Stouraitis, and et.al., "Prime-factor DCT algorithms", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no.3, pp. 772-776, 1995.
- [91] L. P. Chau, D. P. K. Lun, and W.-C. Siu, "Efficient Prime Factor Algorithm and Address Generation Techniques for the Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Circuits and Syst., Pt.II*, vol.48, no.10, pp. 985-988, 2001.
- [92] V. Britanak, "Discrete Cosine and Sine Transforms", in *The Transform and Data Compression Handbook*, Ed. K. R. Rao and P.C. Yip. / V. Britanak (Chapter 4), Boca Raton: CRC Press LLC, 2001, pp. 138-216.
- [93] Z. Wang, "A fast algorithm for the discrete sine transform implemented by the fast cosine transform", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol.ASSP-30, no. 5, pp. 814–815, 1982.
- [94] P. Lee and F.-Y. Huang, "Restructured recursive DCT and DST algorithms", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 7, pp. 1600-1609, 1994.
- [95] В. К. Задирака, *Теория вычисления преобразования Фурье*. Киев: Наук. думка, 1983.
- [96] М. М. Яцимівський, *Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень*. Львів: Академічний Експрес, 1997.
- [97] V. Britanak, "A Unified Approach to the Fast Computation of Discrete Sinusoidal Transforms I: DCT and DST Transforms", *Computers and Artificial Intelligence*, vol. 17, pp. 583-607, Dec., 1998.
- [98] Z. Wang, "Fast discrete sine transform algorithms", *Signal Process.*, vol. 19, pp. 91-102, 1990.
- [99] H. V. Sorensen, D. L. Jones, C. S. Burrus, and M. T. Heideman, "On computing the discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, ASSP-33, (4), pp. 1231–1238, 1985.
- [100] G. Bi, Y. Chen, and Y. Zeng, "Fast algorithms for generalized discrete Hartley transform of composite sequence lengths", *IEEE. Trans. Circuits Syst. II*, vol. 47,

- no. 9, pp. 893-901, 1985.
- [101] G. Bi, and S. Tian Lian, "Fast Algorithms for Generalized Discrete Hartley Transform", *J. Circuits, Systems, and Computers*, vol. 10, no. 1-2, pp. 77-84, 2000.
- [102] Y.- H. Chan, and W.- C. Siu, "A New Convolution Structure for the Realisation of the Discrete Cosine Transform", in *IEEE Int. Symp. on Circuits and Syst. (ISCAS'90)*, New Orleans, Louisiana, USA, May 1-3, 1990, pp. 2373-2376.
- [103] P. Duhamel, and H. H'mida, "New 2^n DCT algorithms suitable for VLSI implementation", in *Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP-85)*, Tampa, March, 1985, pp. 780-783.
- [104] Y. H. Chan, and W.- C. Siu, "Algorithm for prime length discrete cosine transforms", *Electronics Lett.*, vol. 26, no. 3, pp. 206-208, 1990.
- [105] Y. H. Chan, and W.- C. Siu, "A cyclic correlated structure for the realization of discrete cosine transform", *IEEE Trans. on Circuits and Syst. – II: Analog and Digit. Signal Process.*, vol. 39, no. 2, pp. 109-113, 1992.
- [106] Y.-H. Chan, and W.- C. Siu, "Generalized approach for the realization of discrete cosine transform using cyclic convolutions", in *Proc. IEEE Int.Conf. Acoust., Speech, Signal process.: digit. speech processing*, Volume III. IEEE Computer Society, Washington, DC, 1993, pp. 277-280.
- [107] R.-X. Yin and W.-C. Siu, "New Fast Algorithm for Computing Prime length DCT through Cyclic Convolutions", *Signal Process.*, Switzerland, vol. 81, pp.895-906, May, 2001.
- [108] R. Asir Sejoie Nath, and D. Jessintha, "High Speed Systolic Array Discrete Cosine Transform Architecture With Fast Convolution", *Int. J. on Advanced Computer Theory and Engineering*, vol. 2, iss. 4, pp. 2319 – 2526, 2013.
- [109] D. F. Chiper, M. N. S. Swamy, M. O. Ahmad, and T. Stouraitis, "Systolic algorithms and a memory-based design approach for a unified architecture for the computation of DCT/DST/IDCT/IDST ", *IEEE Trans. Circuits Syst-I: Reg. Papers*, vol. 52, no. 6, pp. 1125–1137, 2013.
- [110] C. Cheng, and K. K. Parhi, "A novel systolic array structure for DCT", *IEEE Trans. Circuits and Syst.-II: Express Briefs*, vol. 52, no. 7, pp. 366-369, 2005.

- [111] C. Cheng, and K. K. Parhi, "Hardware efficient fast DCT based on novel cyclic convolution structures", *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 54, no. 11, pp. 4419-4434, Nov., 2006.
- [112] V. Muddhasani, and M. D. Wagh, "Bilinear Algorithms for Discrete Cosine Transforms of Prime Length", *Signal Process.*, vol. 86, no 9, pp. 2393-2406, Nov., 2006.
- [113] T.-S. Chang, and C.-W. Jen, "Hardware efficient transform designs with cyclic formulation and subexpression sharing", in *Proc. Int. Symp. on Circuits Syst. (ISCAS)*, Monterey, CA, USA, 1998, pp. 398-401.
- [114] T.-S. Chang, J.-I. Guo, and C.-W. Jen, "Hardware-Efficient DFT Designs with Cyclic Convolution and Subexpression Sharing", *IEEE Trans. Circuits Systems-II: Analog and digit. signal process.*, vol. 47, no. 9, pp. 886-892, 2000.
- [115] H.-C. Chen, J.-I. Guo, C.-W. Jen, and T.-S. Chang, "A memory-efficient realization of cyclic convolution and its application to discrete cosine transform", *IEEE Trans. Circuits and Syst. for Video Techn.*, vol. 15, pp. 445-453, March, 2005.
- [116] H.-C. Chen, J.-I. Guo, C.-W. Jen, and T.-S. Chang, "Distributed arithmetic realisation of cyclic convolution and its DFT application", *IEE Proc. Circuits Devices Syst.*, vol. 152, no. 6, pp. 615-629, December, 2005.
- [117] P. K. Meher, "Systolic Designs for DCT using a Low-Complexity Concurrent Convolutional Formulation", *IEEE Trans. Circuits Syst. for Video Techn.*, vol. 16, no. 9, pp. 1041-1050, 2006.
- [118] P. K. Meher, "A memory-efficient realization of cyclic convolution and its application to discrete cosine transform", in *Int. Sym. on Signals, Circuits Syst. (ISSCS 2007)*, Iasi, Romania, 2007, pp. 1-4.
- [119] Khader Mohammad, and Sos Agaian, "Efficient FPGA implementation of convolution", in *Proc. IEEE Int. Conf. Systems, Man, and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, 2009, pp. 3478-3483.
- [120] P. Saha, A. Banerjee, A. Dandapat, and P. Bhattacharyya, "ASIC Implementation of High Speed Processor for Calculating Discrete Fourier

- Transformation using Circular Convolution Technique", *WSEAS Trans. Circuits Syst.*, vol. 10, iss. 8, pp. 278-288, 2011.
- [121] D. F. Chipper, and P. Ungureanu, "Novel VLSI Algorithm and Architecture with Good Quantization Properties for a High-Throughput Area Efficient Systolic Array Implementation of DCT", *EURASIP J. Advances in Signal Process.*, vol. 2011, pp.1-14, January 2011. doi:10.1155/2011/639043.
- [122] D. F. Chipper, "A new VLSI algorithm and architecture for the hardware implementation of type IV discrete cosine transform using a pseudo-band correlation structure", *Central European J. of Computer Science*, vol.1, no.2, pp.90-97, 2011.
- [123] P. K. Meher, S. Y. Park, B. K. Mohanty, K. S. Lim, and C. Yeo, "Efficient Integer DCT Architectures for HEVC (High Efficiency Video Coding)", *IEEE Trans. Circuits Systems for Video Techn.*, vol. 24, no.1, pp. 168-178, 2014.
- [124] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "Becoming of Discrete Harmonic Transform Using Cyclic Convolutions", *Amer. J. of Circuits, Systems and Signal Process.*, vol. 1, no.3, pp. 114-119, 2015.
- [125] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*. Москва: Мир, 1985.
- [126] С. В. Заболотній, *Цифрове оброблення сигналів: Посібник для студентів*. Черкаси: ЧДТУ (Черкас. держ. технол. ун-т), 2010.
- [127] A. Cipra Barry, "The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms", *SIAM News*, vol. 33, no. 4, pp. 1-2, 2000.
- [128] В. Н. Малозёмов, и С. М. Машарский, *Основы дискретного гармонического анализа*. СанктПетербург: НИИМ, 2003.
- [129] S. A. Martucci, "Symmetric convolution and discrete sine and cosine transforms", *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 42, pp. 1038-1051, May, 1994.
- [130] A. Arico, S. Serra-Capizzano, and M. Tasche, "Fast and numerically stable algorithms for discrete Hartley transforms and applications to preconditioning", *Commun. in information and systems. Int. Press*, vol. 5, no. 1, pp. 21-68, 2005.

- [131] N. L. Tsitsas, "On block matrices associated with discrete trigonometric transforms and their use in the theory of wave propagation", *J. of Comput. Math.*, vol. 28, no. 1, pp. 864-878, 2010.
- [132] V. Britanak, "DCT/DST universal computational structure and its impact for VLSI design", in *IEEE DSP Workshop*, Hunt, TX., Oct., 2000, pp. 15-18.
- [133] S. Oraintara, "The unified discrete Fourier-Hartley transforms: theory and structure", in *IEEE Int. Sym. Circuits Syst. ISCAS (1)*, Scottsdale, Arizona, 2002, pp. 433-436.
- [134] V. Britanak, P. C. Yip, and K. R. Rao, *Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations*. New York, NY: Academic Press, 2007.
- [135] R. V. L. Hartley, "A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems", *Proc. IRE*, Mar., vol. 30, pp. 144-150, 1942.
- [136] A. K. Jain, "A fast Karhunen–Loeve transform for a class of random processes", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 24, pp. 1023-1028, 1976.
- [137] L. N. Wu, "Comments on shift property of DCTs and DSTs", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 38, no. 1, pp. 186-188, 1990.
- [138] Z. Wang, G. A. Julien, and W. C. Miller, "The generalized discrete W transform and its application to interpolation", *Signal Process.*, vol. 36, pp. 99-109, 1994.
- [139] V. Britanak, and K. R. Rao, "The fast generalized discrete Fourier transform: a unified approach to the discrete sinusoidal transforms computation", *Signal Process.*, vol. 79, no. 12, pp. 135–150, December, 1999.
- [140] М. Пушел, и Жозе М. Ф. Моура, "Алгебраический подход к дискретным косинусным и синусным преобразованиям и их быстрым алгоритмам", *SIAM J. of Computing*, vol. 32, no. 5, pp. 1280-1316, 2003.
- [141] L. Auslander, E. Feig, and S. Winograd, "Abelian semi-simple algebras and algorithms for the discrete Fourier transform", *Advances in Applied Mathematics*, vol. 5, pp. 31–55, 1984.

- [142] О. О. Чуприна, "Удосконалений алгоритм ШПФ на базі швидкої згортки ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Радіoeлектроніка та телекомунікації*, № 618, с. 174-179, 2008.
- [143] M. D. Wagh, and H. Ganesh, "A new algorithm for the discrete cosine transform of arbitrary number of points", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-29, no. 4, pp. 269-277, 1980.
- [144] І. Процько, "Аналіз алгебраїчної системи аргументів для простого обсягу ДПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с. 48-53, 2011.
- [145] I. Prots'ko, "Analysis algebraic system of arguments for prime size DHT", in *Proc. XIth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET'2012)*, Lviv-Slavske, 24-28 february, 2012, pp.428.
- [146] Л. Я. Куликов, *Алгебра и теория чисел*. Москва: Высшая школа, 1979.
- [147] В. М. Муттер, *Основы помехоустойчивой телепередачи информации*. Санкт-Петербург: Энергоатомиздат, 1990.
- [148] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*. Москва: Издательство научно-теоретической литературы, 1952.
- [149] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms*. 3rd ed., t.1, NJ:Addison-Wesley Publishing Co., 1997.
- [150] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*. Москва: Наука, 1975.
- [151] G. James, and M. Liebeck, *Representations and characters of groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [152] S.V. Kanetkar, and M. D. Wagh, "Group character tables in discrete transform theory", *J. of Computer and System Science*, vol. 19, pp. 211-221, 1979.
- [153] І. О. Процько, "Спосіб приведення дискретних гармонічних складових цифрових сигналів до циклічних згорток", *G06F 17/16 (2006.01), H03M 7/30 (2006.01), Патент 96540 Україна*, 10.11.2011. Бюл. №21.
- [154] І. О. Процько, "Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету*

- "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 549, с. 157-164, 2005.
- [155] І. О. Процько, "Узагальнене ефективне дискретне гармонічне перетворення даних", *Технічні вісті*, №1(22), 2(23), с. 88-92, 2006.
- [156] І. О. Процько, "Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 626, с. 74-78, 2008.
- [157] I. Prots'ko, "The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms", in *Proc. IVth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2008)*, Polyana, 21-24 may, 2008, pp. 101-102.
- [158] R. Nykyforchin, and I. Prots'ko, "Computational algorithm of the discrete harmonic components for microelectronic systems", in *Proc. Ist Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2005)*, Lviv-Polyana, 25-28 may, 2005, pp. 21-22.
- [159] Р. Никифорчин, та І. Процько, "Формування блочно-матричних структур для алгоритмів гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Автоматика, вимірювання та керування*, № 530, с. 175-180, 2005.
- [160] Р. Б. Никифорчин, та І. Процько, "Секціонування базової матриці дискретного гармонічного перетворення даних", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 564, с. 40-45, 2006.
- [161] І. О. Процько, та Р. Рикмас, "Аналіз циклічних підматриць в структурі базису дискретних гармонічних перетворень", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 710, с. 209-214, 2011.
- [162] I. Prots'ko, and R. Rikmas, "Analysis cyclic submatrices in structure of basis discrete harmonic transform", in *Proc. VIIth Int. Conf. Perspective Technologies*

- and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2011)*, Polyana, 12-14 may, 2011, pp. 64-66.
- [163] І. О. Процько, "Схема алгоритму синтезу гармонічних дискретних перетворень в підсистемі аналізу САПР", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №694, с. 297-302, 2011.
- [164] H. V. Sorensen, D. L. Jones, M. T. Heideman, and C. S. Burrus, "Real Valued Fast Fourier Transform Algorithms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 35, no. 6, pp. 849-863, June, 1987.
- [165] R. Gluth, Regular "FFT-related transform kernels for DCT/DST- based polyphase filter banks", in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process., (ICASSP 1991)*, Toronto, May, 1991, pp. 2205-2208.
- [166] R. J. Clarke, "Relation between the Karhunen–Loève and cosine transforms", *IEEE Proc. Part F: Commun., Radar and Signal Process.*, vol.128, no. 6, pp. 359-360, 1981.
- [167] М. А. Чичева, "Эффективный алгоритм дискретного косинусного преобразования четной длины", *Компьютерная оптика*, № 18, с. 147-149, 1998.
- [168] М. А. Чичева, "Быстрые алгоритмы дискретных косинусных преобразований", *Компьютерная оптика*, № 16, с. 122-130, 1996.
- [169] K. Rose, A. Heiman, and I. Dinstein, "DCT/DST alternate-transform of image coding", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, no. 1, pp. 94-101, Jan., 1990.
- [170] K. R. Rao, and J. J. Hwang, *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [171] Ю. Б. Буркатовская, М. А. Карагодин, и А. Н. Осокин, "Двумерные дискретные преобразования в алгоритмах сжатия видеопоследовательностей" *Известия Томского политехнического университета*, т. 309, № 2, с. 17-22, 2006.
- [172] Z. Wang , "On computing the discrete Fourier and cosine transforms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 33, no. 4, pp. 1341-1344, 1983.

- [173] H. Kitajima, "A symmetric cosine transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-29, no. 4, pp. 317-323, 1985.
- [174] S. A. Martucci, "Convolution-multiplication properties of the entire family of discrete sine and cosine transforms", in *Proc. 26th Annual Conf. Information Sciences and Systems (CISS'92)*, Princeton, NJ, March, 1992, pp. 399-404.
- [175] S. A. Martucci, "Digital filtering of images using the discrete sine and cosine transform", *Optical Engineer.*, vol. 35, no. 1, pp. 119-127, January, 1996.
- [176] Процько І., "Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень", *Вісник НУ "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 591, с. 58–63, 2007.
- [177] I. Prots'ko, "Fast Cosine Transform Algorithm on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. of the 2nd Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2006)*, Lviv-Polyana, 24-27 may, 2006, pp. 65–66.
- [178] I. Prots'ko, "Algorithm of Efficient Computation of DCT I-IV Using Cyclic Convolutions", *Int. J. Circuits, Syst. and Signal Process.*, vol. 7, iss. 1, pp. 1-9, 2013.
- [179] І. О. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДКП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 732, с. 274-280, 2012.
- [180] І. О. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДКП на основі циклічних згорток", *Моделювання та інформаційні технології*” зб. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, Вип. 65, с. 110-118, 2012.
- [181] I. Prots'ko, "The Module of DCT^{II} for Size N=8 using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2013)*, Polyana, february 2013, pp. 299-301.
- [182] I. Protsko, "The Efficient Algorithm of Discrete Cosine Transform", in *Proc. IXth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2007)*, Polyana, 20-24 february, 2007, pp. 163-164.

- [183] R. J. Clarke, "Relation between the Karhunen–Loève and sine transforms", *Electronics Lett.*, vol. 20, iss. 1, pp. 12-13, 1984.
- [184] P. S. Kumar, and K. M. M. Rabhu, "A set of new fast algorithms for DCTs and DSTs", *Int. J. of Electronics*, vol.76, no. 4, pp. 553-568, 1994.
- [185] Y. Voronenko, and M. Püschel, "Algebraic Signal Processing Theory: Cooley-Tukey Type Algorithms for Real DFTs", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no.1, pp. 1-19, January, 2009.
- [186] D. F. Chipper, M. N. S. Swamy, M. O. Ahmad, and T. Stouraitis, "A Systolic Array Architecture for the Discrete Sine Transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 9, pp. 2347-2354, 2002.
- [187] M. N. Murty "Realization of Prime-Length Discrete Sine Transform Using Cyclic Convolution", *Int. J. Engineering Science and Technology*, vol. 5, no.3, pp.583-589, March, 2013.
- [188] I. Prots'ko, "Generalized approach for synthesis and computation DST using cyclic convolutions", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2012)*, Polyana, 18-21 april, 2012, pp.66-67.
- [189] I. О. Процько, "Алгоритм обчислення основних видів ДСП на базі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Інформаційні системи та мережі*, № 743, с. 140-151, 2012.
- [190] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Algorithm of efficient computation DST^{I-IV} using cyclic convolutions", *WSEAS Trans. Signal Process.*, vol. 10, pp. 278-288, 2014.
- [191] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [192] I. О. Процько, та В. Теслюк, "Синтез ефективних алгоритмів прямого і зворотнього ДСП на основі циклічних згорток", *Збірн. наук. праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*, Вип. 65, с.196-205, 2012.

- [193] I. Prots'ko, "Synthesis of Efficient Algorithms of DST for Types I, IV via Cyclic Convolutions", *Int. J. Electronic Engineering and Computer Science*, vol.1, no. 1, pp. 6-13, 2016.
- [194] H. Malvar, "Fast computation of the discrete cosine transform and discrete Hartley transform", *Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, ASSP-35, no.10, pp.1484-1485, 1987.
- [195] A. Ganapathiraju, "Report on Analysis and Characterization of Fast Fourier Transform Algorithms", Institute for Signal and Information Processing, Mississippi State University, Technical report, 1999.
- [196] Р. Н. Брейсуэлл, "Быстрое преобразование Хартли", *Труды института инженеров по электронике и радиотехнике*, т.72, №8, с.19-27, 1984.
- [197] A. Amira, "An FPGA based parameterisable system for discrete Hartley transforms implementation", in *Proc. Seventh Int. Symp. Signal Process. and Its Applications*, Paris, vol. 1, p. 625-628, 2003.
- [198] P. Duhamel, and M. Vetterli, "Improved Fourier and Hartley transform algorithms: application to cyclic convolution of real data", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, pp. 642-644, 1986.
- [199] P. K. Meher, and G. Panda, "Fast computation of circular convolution of real-valued data using prime factor fast Hartley transform algorithm" , *IETE J. of Research*, vol.41, no. 4, pp. 261-264, 1995.
- [200] C. H. Paik, G. L. Cote, J. S. DaPonte, and M. D. Fox, "Fast Hartley transforms for spectral analysis of ultrasound Doppler signals", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol.35, no.10, pp. 885-888, 1988.
- [201] S. C. Pei, and I. I. Yang, "Computing pseudo-Wigner distribution by the fast Hartley transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 2346-2349, September, 1992.
- [202] C. H. Paik, and M. D. Fox, "Fast Hartley transforms for image processing", *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol.7, no.2, pp. 149-153, 1988.
- [203] P.-S. Yeh, "Data compression properties of the Hartley transform", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-37, no. 4, pp. 50-51, 1989.

- [204] J.-L. Wu, and W.-P. Shiu, "Discrete Hartley Transform in Error Control Coding", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. ASSP-39, pp. 2356-2359, Oct., 1991.
- [205] R. Saatcilar, S. Ergintav, and N. Canitez, "The use of the Hartley transform in geophysical applications", *Geophysics*, vol. 55, no. 11, pp. 1488-1495, 1990.
- [206] N. C. Hou, H. I. Chang, O. Ersoy, "Generalized discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 2931-2940, 1992.
- [207] A. Arico, S. Serra-Capizano, and M. Tasche, "Fast and numerically stable algorithms for discrete Hartley transforms and applications to preconditioning", *Commun. in information and system*, vol. 5, no. 1, pp. 21-68, 2005.
- [208] Р. Брейсуэлл, *Преобразование Хартли. Теория и приложения*. Москва: Мир, 1990.
- [209] R. P. Millane, "Analytic properties of the Hartley Transform and their implications", *Proc. IEEE*, vol. 82, no. 3, pp. 413-428, 1994.
- [210] R. F. Ulmann, "An algorithm for fast Hartley transform", Stanford Exploration Project reports, pp. 45-62, 1984.
- [211] M. Popovic, and D. Sevic, "A new look at the comparison of the fast Hartley and Fourier transform", *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 42, no. 8, pp. 2178-2182, 1994.
- [212] O. Buneman, "Conversion of FFT's to fast Hartley transforms", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 7, pp. 624-638, 1986.
- [213] И. Кантор, "Эффективное вычисление дискретного преобразования Фурье и дискретного преобразования Хартли", 2002. [Электронный ресурс]. Доступно: http://algotlist.manual.ru/math/fft_art.zip .
- [214] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy, "New Parametric Discrete Fourier and Hartley Transforms, and Algorithms for Fast Computation", *IEEE Trans. Circuits and Syst. I: Reg. Papers*, vol. 58, no. 3, pp. 562-575, March, 2011.
- [215] H. Shu, and J. Wu, "Fast radix3 algorithm for the Generalized Discrete Hartley Transform of type II", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 19, no. 6, pp. 348- 351, 2012.

- [216] D. F. Chipper, "Fast radix-2 algorithm for the discrete Hartley transform of type II", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 18, no. 11, pp. 687-689, 2011.
- [217] С. Л. Злобин, "Матричные рекуррентные алгоритмы быстрого преобразования Хартли по основаниям 2 и 4 повышенного быстродействия", *Радиотехника*, №11, с. 22-32, 2009.
- [218] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy, "A new split-radix FHT algorithm for length- $q \cdot 2^m$ DHTs", *IEEE Trans. Circuits Syst. I.*, vol. 51, no. 10, pp.2031-2043, Oct., 2004.
- [219] H. M. de Oliveira, and R. M. Campello de Souza, "A factorization scheme for some discrete Hartley transform matrices", in *Proc. of Int. Confr. on System Engineering, Communications and Informations Technologies*, Punta Arenas, Chile, 2001. [Online]. Available: http://www2.ee.ufpe.br /codec/1_01.pdf
- [220] Y.-H. Chan, and W.-C. Siu, "New Formulation of Fast Discrete Hartley Transform with the Minimum Number of Multiplications", in *Proc. IEEE Pacific Rim Conference on communications, Computers and Signal Processing*, Victoria, Canada, May 9-10, 1991, pp. 323-326.
- [221] A. Arico, S. Serra-Capizzano, and M. Tasche, "Fast and numerically stable algorithms for Discrete Hartley Transforms and applications to preconditioning", *Commun. in information and systems*, vol. 5, no. 1, pp. 21-68, 2005.
- [222] Y.-M. Huang, and J.-L. Wu, "Polynomial transform based algorithms for computing two-dimensional generalized DFT, generalized DHT, and skew circular convolution", *Signal Process.*, vol. 80, pp. 2255-2260, 2000.
- [223] D. F. Chipper, M. N. S. Swamy, and M. O. Ahmad, "An efficient design approach for a prime-length generalized Hartley transform systolic array", *IEEE DSP Workshop*, Hunt, TX, 2000. [Online]. Available: <http://www.spid.rice.edu/DSP2000>.
- [224] D. F. Chipper, M. N. S. Swamy, and M. O. Ahmad, "An efficient systolic array algorithm for the VLSI implementation of a prime-length DHT", in *Proc. Int. Symp. Signals, Circuits Syst. (ISSCS 2005)*, Iasi, Romania, July, 2005, pp. 167-169.

- [225] P. K. Meher, J. C. Patra, and M. N. S. Swamy, "High-throughput memory-based architecture for DHT using a new convolutional formulation", *IEEE Trans. Circuits Syst. II.*, vol. 54, no. 7, pp. 606-610, July, 2007.
- [226] D. P.-K. Lun, and W.-C. Siu, "On prime factor mapping for the discrete Hartley Transform", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, no. 6, pp. 1399-1411, June, 1992.
- [227] І.О. Процько, "Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 522, с. 85-89, 2004.
- [228] I. Prots'ko, "The Efficient Computation of Discrete Hartley Transform on Base Cyclic Convolutions", in *Proc. Vth Int. Scientific and Technical Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT 2010)*, Lviv, 14-16 october, 2010, pp.157-158.
- [229] I. Prots'ko, "The Efficient Computation DHT using Cyclic Convolutions", in *Proc. XIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2011)*, Polyana, 24-28 february, 2011, pp. 85-86.
- [230] І. О. Процько, "Ефективне обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи та мережі*, № 688, с. 190-196, 2010.
- [231] І. О. Процько, "Синтез та обчислення основних типів ДПХ на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 744, с. 302-311, 2012
- [232] I. Prots'ko, "Algorithm of efficient computation of generalized discrete Hartley transform based on cyclic convolutions", *IET Signal Process.*, vol. 8, iss. 4, pp.301-308, 2014.
- [233] D. I. Moldovan, and J. A. B. Fortes, "Partitioning and mapping of algorithms into fixed size systolic arrays", *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-35(1), pp. 1-12, January, 1986.

- [234] В. А. Костенко, "Особенности построения эффективных вычислительных систем для цифровой обработки сигналов на базе систолических процессоров", *Радиотехника*, № 7-8, с. 31-38, 1992.
- [235] І. О. Процько, та В. А. Радомський, "Пристрій для обчислення швидкого трансформування Фур'є", *G06F7/00, G06F15/00, Декл. патент 346144 Україна*, 15.03.2001, Бюл. №2.
- [236] І. О. Процько, "Обчислювальні структури адаптивного до обсягу ШПФ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 651, с. 145-151, 2009.
- [237] R. A. Iannucci, "Toward a dataflow/von Neumann hybrid architecture", in *Proc. 15th Int. Symp. on Computer Architecture (ISCA)*, Honolulu, Hawaii, May, 1988, pp. 131-140.
- [238] I. Prots'ko, and R. Rikmas "Analysys parallel processing DHT using convolution on SIMT model", in *Proc. VIIth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2012)*, Lviv, 20-24 november, 2012, pp. 136-137.
- [239] М. Абрамович, и И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*. Москва: Наука, 1979.
- [240] V. Hindriksen, "How expensive is an operation on a CPU", 2012. [Online]. Available: <https://streamcomputing.eu/blog/2012-07-16/how-expensive-is-an-operation-on-a-cpu/> Accessed on: May, 2018.
- [241] О. А. Гришук, та І. О. Процько, "Обчислення значень канонічного розкладу одновимірної величини", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*. № 501, с. 30–32, 2004.
- [242] І. О. Процько, та В. М. Теслюк, "Пристрій канонічного розкладу числа на множники", *G06F7/04(2006.01), G06F17/10(2006.01), Патент 116912 Україна*, 25.05.2018, Бюл. №10.
- [243] І. О. Процько, "Розпаралелення на рівні підзадач алгоритму ШГП на основі циклічних згорток", *Вісник національного університету "Львівська*

політехніка": *Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, №826, с. 306-312, 2015.

- [244] I. Prots'ko, "Computational parallel models of the discrete harmonic transforms", in *Proc. VIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2005)*, Lviv-Polyana, 23-26 february, 2005, pp. 230-231.
- [245] І. О. Процько, "Обчислювальні паралельні моделі гармонічних дискретних перетворень", на *Наук.-прак. конф. Математичне моделювання складних систем*, Львів, 2007, с. 214-219.
- [246] S. W. Smith, *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists.*/ 2nd ed., California: Technical Publishing, 2003.
- [247] T. Srikanthan, N. Kumar, and A. J. Nanyang, "A Circular Formulation of the Prime Length DHT Kernel and its FPGA Implementation", in *Proc. Information, Communications and Signal Processing of the Fourth International Conf., ICSP 2003*, Singapore, Dec. 2003, pp. 23-27.
- [248] R. Asir Sejoie Nath, and D. Jessintha, "High Speed Systolic Array Discrete Cosine Transform Architecture With Fast Convolution", in *Int. J. on Advanced Computer Theory and Engineering*, Singapure, 2013, vol. 2, iss. 4,. pp. 2319-2526.
- [249] K. Mohammad, and S. Agaian, "Efficient FPGA implementation of convolution", in *Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, October, 2009, pp. 3478-3483.
- [250] A. Saha, A. Banerjee, A. Dandapat, and P. Bhattacharyya, "ASIC Implementation of High Speed Processor for Calculating Discrete Fourier Transformation using Circular Convolution Technique", *WSEAS Trans.Circuits and Syst.*, iss. 8, vol. 10, pp.278-288, August, 2011.
- [251] S. B. Pan, and R.-H. Park, "Unified Systolic Arrays for Computation of the DCT/DST/DHT", *IEEE Trans. Circuits and Syst. forVideo Techn.*, vol. 7, no. 2, pp.413-419, 1997.

- [252] H.-C. Chen, J.-I. Guo, C.-W. Jen, and T.-S. Chang, "Distributed arithmetic realisation of cyclic convolution and its DFT application", *IEE Proc. Circuits Devices Syst.*, vol. 152, no. 6, pp. 615-629, December, 2005.
- [253] E. Agraval, and K. Raj, "Type-IV DCT using Systolic Array based on Cyclic Convolution Algorithm", *Int. J. of Electronics and Commun. Eng.*, vol. 2, pp. 93-97, Aug., 2012.
- [254] І. О. Процько, "Взаємозв'язок ефективних дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів 2^n ", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 685, с. 125-130, 2010.
- [255] I. Prots'ko, and V. Teslyuk "Computational structure of DST-II using convolvers", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2015)*, Polyana, february, 2015, pp.200-202.
- [256] I. Prots'ko, "The algorithm and structures for efficient computation of type II/III DCT/ DST/ DHT using cyclic convolutions", *Int. J. Signal Process. Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-127, 2014.
- [257] I. Prots'ko, "Interconnection discrete harmonic transforms sizes 2^n on base circular convolutions", in *Proc. VIth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2010)*, Polyana, 20-23 april, 2010, pp.49-50.
- [258] Z. Wang, "Harmonic analysis with a real frequency function", Part III, *Appl. Math. Comput.*, vol. 9, pp. 245-255, 1981.
- [259] S. Zohar, "Faster Fourier Transformation: The Algorithm of S. Winograd", Jet Propulsion Laboratory JPL Publication 78-104, under NASA. Contract No. NAS7-100, pp. 1-93, February 15, 1979.
- [260] І. Процько, та В. Радомський, "Узагальнений підхід швидкого трансформування класу Фур'є на основі згорток" на *V Всеукр. міжн. конф. УкрОБРАЗ'2000*, Київ, 2000, с. 249-252.

- [261] І. Процько, та В. Радомський, "Обчислення швидкого трансформування Фур'є за допомогою згорток", *II Нац. наук.-практ. конф. "Системний аналіз та інформаційні технології": Збірка тез доповідей*, Київ: НТУУ "КПІ", 2000, с. 97-98.
- [262] I. Protsko, "Adaptive synthesis to transform size of Fast Fourier Algorithm", in *Proc. VIIth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2003)*, Lviv-Slavske, 18-22 february 2003. pp. 230-231.
- [263] I. Prots'ko, "Computational structure of adaptive to transform size FFT", in *Proc. Xth Int. Conf. Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM'2009)*, Polyana, 24-28 february, 2009, pp. 255-257.
- [264] I. Prots'ko, "The compare of computation FFT on base cyclic convolutions for size of $N=2^n$ ", in *Proc. Vth Int. Conf. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH'2009)*, Polyana, 22-24 april, 2009, pp. 70-72.
- [265] І. О. Процько, "Особливості обчислення циклічних згорток для ідентичних послідовностей", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, № 719, с. 200-206, 2011.
- [266] I. Prots'ko, "The specific of computation cyclic convolutions for identical sequences", in *Proc. VIth Int.Scienc. and Tech. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2011)*, Lviv, 16-19 november, 2011, pp. 301-302.
- [267] Р. Рикмас, "Порівняння ефективності реалізацій ШПФ в програмних бібліотеках", *Вісник національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика*, № 711, с.26-30, 2011.
- [268] M. J. Bergström, "Study of Convolution Algorithms using CPU and Graphics Hardware", M. S. thesis in the Programme Computer Science, University of Gothenburg Chalmers University of Technology Department of Computer Science and Engineering, Göteborg, Sweden, Sept., 2012.
- [269] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The program implementation of the synthesis the efficient algorithms for computation of DCT-II via cyclic

- convolutions", in *Proc. IXth Int. Conf. Computer Science & Information Technologies (CSIT'2014)*, Lviv, 18-22 november, 2014, pp. 116-118.
- [270] FFTW (Fastest Fourier Transform in the West). [Online]. Available: <http://www.fftw.org/>.
- [271] I. Prots'ko, and R. Rykmas, "The Runtime Benchmarking of DCT-II based on Cyclic Convolutions", *Int. J. of Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management*, vol. 21, no. 2, pp. 11-16, 2018.
- [272] I. Prots'ko, R. Rikmas, and V. Teslyuk "The efficient computation of integer DCT based on cyclic convolutions", in *Proc. XIIIth Int. Conf. Computer Sciences & Information Technologies (CSIT'2018)*, Lviv, 11-14 september 2018, pp.245-248.