УДК 618.315

С.В. Бевз к.т.н., доц., В.В. Войтко к.т.н., доц., Ю.В. Томашевський асп.

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРИНЦИПУ ВКЛАДЕНИХ МАТРИЦЬ В ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

Актуальність. Нині в різних галузях народного господарства значна частина обладнання вичерпала свій ресурс і потребує неодмінного контролю основних показників надійності.. Загалом, надійність роботи будь-якої технічної системи залежить від її складу та структури, тобто якості та кількості складових елементів і способів їх з’єднання в схемі.

Чимало сучасних проблем в галузі електроенергетики, схемотехніки, радіотехніки та ін. отримують в матричному вигляді догідну інтерпретацію – сукупне представлення основних показників надійності роботи обладнання подає узагальнену оцінку надійності складних технічних систем, дозволяє виявити латентні взаємозв’язки між параметрами схеми, відображає комплексну картину надійнісних співвідношень об’єкту досліджень. Тому, актуальним питанням в теорії надійності при вирішенні схемних задач постає перспектива використання матричних перетворень.

Аналіз останніх досліджень та постановка задачі. Слід зазначити, що, загалом, розрахунок надійності складних технічних систем проводиться на ґрунті аналітичних методів [1, 2] та методів, що використовують статистичне моделювання [3]. Обидві групи методів можуть бути розподіленими залежно до того, розглядається процес функціонування об’єкту чи лише окремий стан об’єкту. Найбільшого поширення набули сьогодні аналітичні методи розрахунку надійності нат рівні випадкових процесів. Репрезентуючи перспективи використання імовірнісних методів матричного аналізу [4] в розрахунках складних структурних схем надійності, розглянемо граф мережі розподіленого резервування (див. рис. 1) з матрицею безпосередніх зв’язків, яка є симетричною відносно головної діагоналі квадратною матрицею з одиничними діагональними елементами, та елементами, що складають булеві функції прямого з’єднання між вузлами схеми. Базовим показником надійності виступає імовірність безвідмовної роботи елементів схеми P_n, $n = \overline{1,...,10}$. Відмови кожного блоку схеми є незалежними подіями, які виключають можливість проходження сигналу між відповідними вузлами схеми [5].

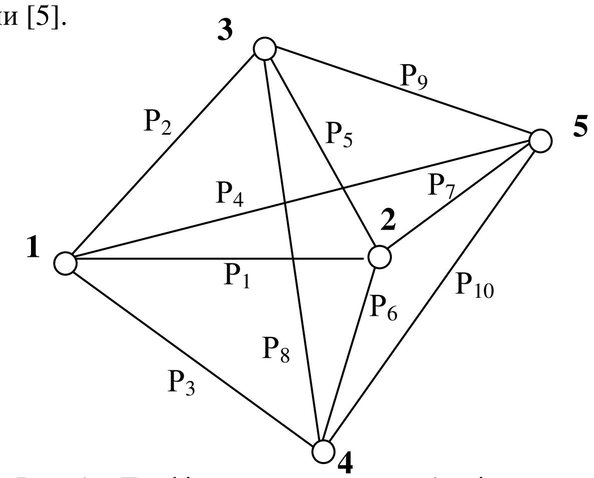

Рис. 1 – Графічна схема взаємозв'язків.

Для реалізації принципу вкладених матриць розіб’ємо матрицю взаємозв’язків на блоки:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_1 & 1 & P_5 & P_6 & P_7 \\ P_2 & P_5 & 1 & P_8 & P_9 \\ \hdashline P_3 & P_6 & P_8 & 1 & P_{10} \\ P_4 & P_7 & P_9 & P_{10} & 1 \end{array}\right] \end{array}, \qquad (1)$$

тоді дана матриця запишеться у вигляді блочної: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,

де $A=\begin{bmatrix} 1 & P_1 & P_2 \\ P_1 & 1 & P_5 \\ P_2 & P_5 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} P_3 & P_4 \\ P_6 & P_7 \\ P_8 & P_9 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} P_3 & P_6 & P_8 \\ P_4 & P_7 & P_9 \end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix} 1 & P_{10} \\ P_{10} & 1 \end{bmatrix}$.

Побудова повної матриці взаємозв'язків. Проведемо процедуру розгортання узагальненої матриці взаємозв'язків, розпочавши з симетричної субматриці (блок D), ключовим елементом якої є імовірність безвідмовної роботи десятої вітки графа схеми (вітка між вузлами 4, 5):

$$\begin{bmatrix} 1 & P_{10} \\ P_{10} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_8 + P_9P_{10} \\ P_9 + P_8P_{10} \end{bmatrix}.$$

Отриманий за результатами кон'юнкції вектор складає функціональні елементи першого рядка на порядок вищої субматриці взаємозв'язків, яка в свою чергу слугує для визначення елементів першого рядка субматриці наступного рівня:

$$\begin{bmatrix} 1 & P_8 + P_9P_{10} & P_9 + P_8P_{10} \\ P_8 + P_9P_{10} & 1 & P_{10} + P_8P_9 \\ P_9 + P_8P_{10} & P_{10} + P_8P_9 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5 + P_6(P_8 + P_9P_{10}) + P_7(P_9 + P_8P_{10}) \\ P_6 + P_5(P_8 + P_9P_{10}) + P_7(P_{10} + P_8P_9) \\ P_7 + P_6(P_{10} + P_8P_9) + P_5(P_9 + P_8P_{10}) \end{bmatrix}$$

Реалізуючи принцип вкладених матриць, доповнюємо блочну структуру субматриці елементами вищого рівня, отриманими за результатами виконання операції логічного множення матриці нижчого рівня на вектор імовірностей безпосередніх зв'язків цих блоків.

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} P_5 + P_6(P_8 + P_9P_{10}) + \\ + P_7(P_9 + P_8P_{10}) \end{matrix} & \begin{matrix} P_6 + P_5(P_8 + P_9P_{10}) + \\ + P_7(P_{10} + P_8P_9) \end{matrix} & \begin{matrix} P_7 + P_6(P_{10} + P_8P_9) + \\ + P_5(P_9 + P_8P_{10}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_5 + P_6(P_8 + P_9P_{10}) + \\ + P_7(P_9 + P_8P_{10}) \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} P_8 + P_5(P_6 + P_7P_{10}) + \\ + P_9(P_{10} + P_6P_7) \end{matrix} & \begin{matrix} P_9 + P_5(P_7 + P_6P_{10}) + \\ + P_8(P_{10} + P_6P_7) \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_6 + P_5(P_8 + P_9P_{10}) + \\ + P_7(P_{10} + P_8P_9) \end{matrix} & \begin{matrix} P_8 + P_5(P_6 + P_7P_{10}) + \\ + P_9(P_{10} + P_6P_7) \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} P_{10} + P_6(P_7 + P_9P_5) + \\ + P_8(P_9 + P_5P_7) \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_7 + P_6(P_{10} + P_8P_9) + \\ + P_5(P_9 + P_8P_{10}) \end{matrix} & \begin{matrix} P_9 + P_5(P_7 + P_6P_{10}) + \\ + P_8(P_{10} + P_6P_7) \end{matrix} & \begin{matrix} P_{10} + P_6(P_7 + P_9P_5) + \\ + P_8(P_9 + P_5P_7) \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Отримана матриця четвертого порядку слугує для визначення першої стрічки повної матриці взаємозв'язків, яка може бути знайдена за результатами кон'юнкції елементів даної матриці та елементів першого рядка матриці безпосередніх зв'язків.

Слід зауважити, що елементи субматриці є симетричними відносно головної діагоналі. Так, наприклад, для комірок {1, 2} та {2, 1} булевий вираз може бути поданий у вигляді:

$$P_5 + P_6(P_8 + P_9P_{10}) + P_7(P_9 + P_8P_{10}) = P_5 + P_8(P_6 + P_7P_{10}) + P_9(P_7 + P_6P_{10})$$

Для визначення повного значення імовірності P_{12} безвідмовної роботи вітки між вузлами 1 і 2 послуговуємось отриманим значенням першого блоку схеми.

$$P_{12} = P_1 + \begin{bmatrix} P_5 + P_6(P_8 + P_9P_{10}) \\ + P_7(P_9 + P_8P_{10}) \end{bmatrix} \cdot P_2 + \begin{bmatrix} P_6 + P_5(P_8 + P_9P_{10}) \\ + P_7(P_{10} + P_8P_9) \end{bmatrix} \cdot P_3 + \begin{bmatrix} P_7 + P_6(P_{10} + P_8P_9) \\ + P_5(P_9 + P_8P_{10}) \end{bmatrix} \cdot P_4 \qquad (2)$$

Елементи повної матриці отримуються за результатами взаємозаміни індексів елементів матриці, що реалізується заміною базисного вузла.

Заміна базису. За базис в даному прикладі приймається перший вузол, який за визначенням направлених потоків актуалізує еквівалентне джерело живлення. Для визначення елементів третього рядка повної матриці взаємозв'язків, проведемо заміну базисного вузла з першого на третій. Здійснимо переіндексацію елементів матриці безпосередніх зв'язків (1). Позначимо нові індекси у верхньому регістрі її елементів:

$$\begin{bmatrix} 1 & P_1^5 & P_2^2 & P_3^8 & P_4^9 \\ P_1^5 & 1 & P_5^1 & P_6^6 & P_7^7 \\ P_2^2 & P_5^1 & 1 & P_8^3 & P_9^4 \\ P_3^8 & P_6^6 & P_8^3 & 1 & P_{10}^{10} \\ P_4^9 & P_7^7 & P_9^4 & P_{10}^{10} & 1 \end{bmatrix}$$

Для отримання елементу P_{23} повної матриці взаємозв'язків у виразі (2) виконується заміна індексів елементів матриці $1 \Leftrightarrow 5,\ 3 \Leftrightarrow 8,\ 4 \Leftrightarrow 9$:

$$P_{23} = P_5 + \begin{bmatrix} P_1 + P_6(P_3 + P_4P_{10}) \\ + P_7(P_4 + P_3P_{10}) \end{bmatrix} \cdot P_2 + \begin{bmatrix} P_6 + P_1(P_3 + P_4P_{10}) \\ + P_7(P_{10} + P_3P_4) \end{bmatrix} \cdot P_8 + \begin{bmatrix} P_7 + P_6(P_{10} + P_3P_4) \\ + P_1(P_4 + P_3P_{10}) \end{bmatrix} \cdot P_9$$

В такий спосіб здійснюється уточнення індексів решти елементів повної матриці взаємозв'язків, що подана в додатку А.

Повну матрицю взаємозв'язків рівною мірою можна реалізувати шляхом проведення логічних операцій над відповідними стрічками та стовпцями матриці для отримання добутку цієї матриці саму на себе, що рівносильне піднесенню булевої матриці (1) до степені, яка менша або дорівнює числу, на одиницю меншого від кількості вузлів схеми. Операцію логічного множення матриці (1) саму на себе слід припиняти як тільки матриця почне повторюватися [4].

Внаслідок накопичення похибки, матриця повних взаємозв'язків, отримана в результаті виконання операцій піднесення до степеня може не досить точно збігатися з матрицею, отриманою за принципом вкладених матриць. Тому, не слід категорично наполягати на використанні спрощення матриці за рахунок мінімізації її елементів, беручи до уваги проміжні значення імовірностей матриці взаємозв'язків (між граничними значеннями абсолютно надійного елементу – позначається одиницею, абсолютно ненадійного (відмови) – позначається нулем).

Справедливість отриманих співвідношень підтверджується шляхом моделювання логічних функції за таблицями відповідностей [6]. Для подання логічних елементів булевої матриці в більш зручному вигляді пропонується використовувати функцію перетворення.

Функція перетворення. Повну матрицю взаємозв'язків також можна отримати в результаті послідовного перетворення матриці (1) відносно двох вибраних вузлів [1, 6]. Послідовним виключенням 5, 4, 3 вузлів приведемо матрицю (1) до матриці повних взаємозв'язків відносно вузлів 1 та 2.

Матриця (1) в результаті виключення п'ятого вузла схеми трансформується до вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & P_1 \vee P_4P_7 & P_2 \vee P_4P_9 & P_3 \vee P_4P_{10} \\ & 1 & P_5 \vee P_7P_9 & P_6 \vee P_7P_{10} \\ & & 1 & P_8 \vee P_9P_{10} \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Внаслідок скорочення контуру abc при вилученні вузла, що лежить між вітками b та c, результуюче значення імовірності безвідмовної роботи вітки a визначається наступною функцією перетворень:

$$f(a,b,c) = p_a + q_a p_b p_c,$$

де p_a, q_a – імовірність відповідно безвідмовної роботи та імовірність відмов основної вітки, яка залишається в схемі; p_b, p_c – імовірність безвідмовної роботи віток, які складають з віткою, що залишилася, трикутний контур, який вилучається в результаті виключення вузла.

Скоротивши матрицю за рахунок вилучення четвертого вузла, отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 1 & f(f(1,4,7), f(3,4,10), f(6,7,10)) & f(f(2,4,9), f(3,4,10), f(8,9,10)) \\ & 1 & f(f(5,7,9), f(6,7,10), f(8,9,10)) \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & f_2 \\ & 1 & f_5 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Повна імовірність першого вузла визначається як потрійна рекурсія функції перетворень:

$$P_I = f(f_1, f_2, f_5) = f\begin{pmatrix} f(f(1,4,7), f(3,4,10), f(6,7,10)), \\ f(f(2,4,9), f(3,4,10), f(8,9,10)), \\ f(f(5,7,9), f(6,7,10), f(8,9,10)) \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю індексів повної імовірності першого вузла у компактному вигляді, розмістивши перші елементи функції перетворення як елементи головної діагоналі матриці:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1,4,7 & 3,4,10 & 6,7,10 \\ 3,4,10 & 2,4,9 & 8,9,10 \\ 6,7,10 & 8,9,10 & 5,7,9 \end{bmatrix}.$$

Слід зауважити, що дана матриця є симетричною відносно головної діагоналі як і матриця імовірностей (1). Перший рядок матриці позначає паралельне поєднання 1 вітки з послідовним з'єднанням 3 та 6 віток. Другий рядок матриці, відповідно 2 вітки з вітками 3 та 8. Третій рядок матриці – 5 вітки з вітками 6 та 8. Повна імовірність першого вузла визначається функцією перетворень, що позначає паралельне з'єднання результуючої першої вітки (визначеної в попередній ітерації) з послідовним з'єднанням результуючих значень другої та п'ятої віток, які скорочуються у процесі перетворень

Запишемо матрицю відносно вузлів, які охоплюють контури заданих віток:

$$M_в = \begin{bmatrix} 1,2,5 & 1,4,5 & 2,4,5 \\ 1,4,5 & 1,3,5 & 3,4,5 \\ 2,4,5 & 3,4,5 & 2,3,5 \end{bmatrix}$$

Отже, ключовими контурами в даному випадку є контури головної діагоналі 1-2-5, 1-3-5, 2-3-5, допоміжними контурами є контури 1-4-5, 2-4-5, 3-4-5. Слід зауважити, що в кожний із контурів входить п'ятий вузол (його можна вважати основним), оскільки цей вузол є першим вилученим вузлом. Четвертий вузол є допоміжним вузлом, який використовується для формування першої вітки блоку D який виділяється першим серед масиву блоків матриці взаємозв'язків. У виділені блоки даної матриці входять відповідно елементи перший та третій, які позначають вузли схеми виділених контурів.

Висновки. В статті запропоновано принцип вкладених матриць для задач надійності складних структурних схем, який розкриває імплікативні зв'язки елементів матриць даного класу і використовується для формування повної матриці взаємозв'язків та полягає у побудові булевої субматриці вищого порядку шляхом доповнення її блочної структури елементами, отриманими в результаті кон'юнкції даної субматриці і відповідних елементів матриці взаємозв'язків.

Уточнення індексів елементів повної матриці взаємозв'язків пропонується здійснювати шляхом виведення з базису першого вузла та почерговим внесенням інших вузлів, що викличе переіндексацію змінних повних значень імовірностей безвідмовної роботи відповідних блоків схеми. Для спрощення логічних виразів та зручності проведення аналізу структурних схем надійності запроваджується функція перетворень, яка дозволяє розглядати процедуру вилучення вузла при спрощенні схеми як виключення контура, до якого входить вузол, що вилучається.

Література

1. Гук Ю.Б. Теория надежности в электроэнергетике (Учеб. пособие для электроэнерг. спец. вузов). – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 206с.

2. Розанов М.Н. Надежность сетей электрических систем. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 200 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – 4-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1972. – 368с.

4. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975. – 768 с.

5. Бевз С.В., Войтко В.В., Лапко В.С. Спрощення структурних схем надійності методом еквівалентних перетворень// Вісник ВПІ. – № 6. – 2003. – С. 298-303.

6. Бевз С.В., Бурбело С.М., Томашевський Ю.В. Матричний аналіз надійності складних систем// Вісник ВПІ. – № 6. – 2003. – С. 298-303.

Додаток А

Повна матриця взаємозв'язків

$$
\begin{bmatrix}
1 & P_1 + \left[P_5 + P_6(P_8 + P_9P_{10}) + P_7(P_9 + P_8P_{10})\right]\cdot P_2 + \left[P_6 + P_5(P_8 + P_9P_{10}) + P_7(P_{10} + P_8P_9)\right]\cdot P_3 + \left[P_7 + P_6(P_{10} + P_8P_9) + P_5(P_9 + P_8P_{10})\right]\cdot P_4 & P_2 + \left[P_5 + P_8(P_6 + P_7P_{10}) + P_9(P_7 + P_6P_{10})\right]\cdot P_1 + \left[P_8 + P_5(P_6 + P_7P_{10}) + P_9(P_{10} + P_7P_6)\right]\cdot P_3 + \left[P_9 + P_5(P_7 + P_6P_{10}) + P_8(P_{10} + P_6P_7)\right]\cdot P_4 & P_3 + \left[P_6 + P_8(P_5 + P_7P_9) + P_{10}(P_7 + P_5P_9)\right]\cdot P_1 + \left[P_8 + P_6(P_5 + P_9P_7) + P_{10}(P_9 + P_5P_7)\right]\cdot P_2 + \left[P_{10} + P_6(P_7 + P_5P_9) + P_8(P_9 + P_5P_7)\right]\cdot P_4 & P_4 + \left[P_7 + P_9(P_5 + P_6P_8) + P_{10}(P_6 + P_5P_8)\right]\cdot P_1 + \left[P_9 + P_7(P_5 + P_8P_6) + P_{10}(P_8 + P_5P_6)\right]\cdot P_2 + \left[P_{10} + P_7(P_6 + P_5P_8) + P_9(P_8 + P_5P_6)\right]\cdot P_3 \\
 & 1 & P_5 + \left[P_1 + P_6(P_3 + P_4P_{10}) + P_7(P_4 + P_3P_{10})\right]\cdot P_2 + \left[P_6 + P_1(P_3 + P_4P_{10}) + P_7(P_{10} + P_3P_4)\right]\cdot P_8 + \left[P_7 + P_6(P_{10} + P_3P_4) + P_1(P_4 + P_3P_{10})\right]\cdot P_9 & P_6 + \left[P_3 + P_8(P_2 + P_4P_9) + P_{10}(P_4 + P_2P_9)\right]\cdot P_1 + \left[P_8 + P_3(P_2 + P_4P_9) + P_{10}(P_4 + P_2P_9)\right]\cdot P_5 + \left[P_{10} + P_3(P_4 + P_2P_9) + P_8(P_9 + P_2P_4)\right]\cdot P_7 & P_7 + \left[P_4 + P_9(P_2 + P_3P_8) + P_{10}(P_3 + P_2P_8)\right]\cdot P_1 + \left[P_9 + P_4(P_2 + P_8P_3) + P_{10}(P_8 + P_2P_3)\right]\cdot P_5 + \left[P_{10} + P_4(P_3 + P_2P_8) + P_9(P_8 + P_2P_3)\right]\cdot P_6 \\
 & & 1 & P_8 + \left[P_6 + P_3(P_1 + P_7P_4) + P_{10}(P_7 + P_1P_4)\right]\cdot P_5 + \left[P_3 + P_6(P_1 + P_4P_7) + P_{10}(P_4 + P_1P_7)\right]\cdot P_2 + \left[P_{10} + P_6(P_7 + P_1P_4) + P_3(P_4 + P_1P_7)\right]\cdot P_9 & P_9 + \left[P_7 + P_4(P_1 + P_6P_3) + P_{10}(P_6 + P_1P_3)\right]\cdot P_5 + \left[P_4 + P_7(P_1 + P_3P_6) + P_{10}(P_3 + P_1P_6)\right]\cdot P_2 + \left[P_{10} + P_7(P_6 + P_1P_3) + P_4(P_3 + P_1P_6)\right]\cdot P_8 \\
 & & & 1 & P_{10} + \left[P_7 + P_9(P_5 + P_1P_2) + P_4(P_1 + P_5P_2)\right]\cdot P_6 + \left[P_9 + P_7(P_5 + P_2P_1) + P_4(P_2 + P_5P_1)\right]\cdot P_8 + \left[P_4 + P_7(P_1 + P_5P_2) + P_9(P_2 + P_5P_1)\right]\cdot P_3 \\
 & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

УДК 618.315

Реалізація принципу вкладених матриць в теорії надійності / С.В. Бевз,
В.В. Войтко, Ю.В. Томашевський
У статті репрезентується принцип вкладених матриць та метод уточнення індексів повної матриці взаємозв'язків для розрахунку надійності складних структурних схем. З метою спрощення логічних виразів та зручності проведення аналізу структурних схем надійності пропонується використання функції перетворення.

УДК 618.315

Реализация принципа вложенных матриц в теории надежности / С.В. Бевз,
В.В. Войтко, Ю.В. Томашевский
В статье предложен принцип вложенных матриц и метод замены индексов полной матрицы взаимосвязей для расчета надежности сложных структурных схем. С целью упрощения логических выражений и удобства проведения анализа структурных схем надежности предлагается использовать функции преобразования.

UDK 618.315

Realization of a principle of enclosed matrixes in theory of reliability / S.V. Bevz,
V.V. Voytko, J.V. Tomashevskuy
In the article the enclosed matrixes principle and a correlations full matrix indexes replacement method for calculation of reliability of the difficult block diagrams is offered. With the purpose of simplification of logic expressions and convenience of reliability block diagrams analysis realization it is offered to use transformation functions.

Відомості про авторів

Бевз Світлана Володимирівна – доцент кафедри електричних станцій і систем, **Войтко Вікторія Володимирівна** – доцент кафедри програмного забезпечення, **Томашевський Юрій Васильович** – аспірант.

Вінницький національний технічний університет